

文章编号: 1005- 8893 (2006) 02- 0040- 04

摆线齿锥齿轮重合度的近似计算¹

邹 灏, 周 豪

(江苏工业学院 机械工程系, 江苏 常州 213016)

摘要: 齿轮副的啮合特性是由其齿面的几何形状决定的。通过对摆线齿锥齿轮的啮合理论分析, 得出一对摆线齿锥齿轮传动时的啮合转角与其参数之间的关系式, 并进一步推导出利用啮合转角和产形轮齿数来近似计算重合度的公式; 所导出的公式形式简单, 对摆线齿锥齿轮的设计、加工具有一定的实用意义。

关键词: 摆线齿锥齿轮; 啮合理论分析; 重合度

中图分类号: TH 132. 42 文献标识码: A

Approximate Formulae to Calculate Contact Ratio of Epicycloids Bevel Gears

ZOU Min, ZHOU Hao

(Department of Mechanical Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: The engaged feature of a pair of gears is determined by the geometrical characteristics of their tooth flank. Through an analysis of gearing theory on epicycloidal bevel gears, the equation of the angle during meshing and the parameters for the gears are obtained, and the approximate formulae to calculate the contact ratio of the epicycloidal bevel gears is derived. The formula is simple, compact and has practical value to the design and production of epicycloidal bevel gears.

Key words: extended epicycloids bevel gear; analysis of gearing theory; contact ratio of the epicycloidal bevel gears

重合度是衡量齿轮副的传动质量和承载能力的一个重要指标, 摆线齿锥齿轮的重合度一般是按其当量齿轮近似计算的, 它分为端面当量齿轮和法面当量齿轮^[1, 2], 计算起来相当麻烦。

对于摆线齿锥齿轮, 无论使用哪种机床, 其加工过程中刀刃与被切齿轮之间的相对位置和相对运动一般都是按相同的规律连续变化的, 由于传统机床中运动传递的原理简单、直观, 所以我们选择它来建立数学模型。

用传统机床加工摆线齿锥齿轮时, 安装在摇台

上的刀盘一方面随着摇台公转, 另一方面又绕自身轴线自转^[3]。刀盘相对摇台的运动可以看成是一滚圆绕一基圆作纯滚动, 刀盘上的内、外刀刃分别形成假想齿轮(产形轮)的凹齿面(用于切削齿轮的凸齿面)和凸齿面(用于切削齿轮的凹齿面), 如果内、外刀刃的回转半径不同, 加工出的摆线齿锥齿轮可以实现鼓形齿啮合^[4]。

图 1 (a) 所示为一左旋齿轮 1 驱动一右旋齿轮 2 的情形, 其中 R_i 、 R_m 和 R_e 分别为产形轮的内圆、中圆和外圆半径, δ_1 和 δ_2 分别为两齿轮 1

¹ 收稿日期: 2005- 05- 19

作者简介: 邹灏 (1963-), 女, 安徽淮南人, 教授, 主要从事机械设计理论及机械传动方面的研究。

和2的节锥角, ω_1 和 ω_2 分别为两齿轮的回转角速度。若假设齿轮1的凹齿面和齿轮2的凸齿面分别由假想齿面 Σ_v 和 Σ_c 展成, 那么当齿轮1的凹齿面与齿轮2的凸齿面啮合时, 假想齿面 Σ_v 和 Σ_c 也同时分别与齿轮1的凹齿面和齿轮2的凸齿面啮合; Σ_v 和 Σ_c 相切于直线 Γ_0 , Γ_0 与产形轮中圆的交点 M 称为参考点, 如图1(b)所示, ρ_{0v} 、 ρ_{0c} 和 ρ_v 、 ρ_c 分别为产形面 Σ_v 和 Σ_c 所对应的滚圆半径和基圆半径; r_v 、 r_c 分别相当于形成 Σ_v 和 Σ_c 的刀盘半径, $r_v = r_0 + \Delta r$, $r_c = r_0$, $\Delta r \neq 0$; M_{dv} 、 M_{dc} 分别为机床中外、内切刃对应的刀位, φ_v 、 η_v 和 φ_c 、 η_c 是刀盘的安装参数, ω_p 和 ω_0 分别为摇

台和刀盘的旋转角速度。 Σ_v 和 Σ_c 以同一角速度 (即摇台的角速度) 绕摇台的轴线 $O_p - O_p$ 转动。刀盘、齿轮1和齿轮2与摇台之间的运动关系满足:

$$i_{op} = \frac{\omega_0}{\omega_p} = \frac{\varphi_0}{\varphi_p} = \frac{z_p}{z_0} = \frac{\rho_v}{\rho_{0v}} = \frac{\rho_c}{\rho_{0c}} \quad (1)$$

$$\begin{cases} i_{1p} = \frac{\omega_1}{\omega_p} = \frac{\varphi_1}{\varphi_p} = \frac{z_p}{z_1} = \frac{1}{\sin \delta_1} \\ i_{2p} = \frac{\omega_2}{\omega_p} = \frac{\varphi_2}{\varphi_p} = \frac{z_p}{z_2} = \frac{1}{\sin \delta_2} \end{cases} \quad (2)$$

式中: φ_0 和 φ_p 分别为刀盘和摇台的转角, z_0 为刀盘的刀头数, z_p 为产形轮的齿数; φ_1 和 φ_2 分别为齿轮1和2的转角, z_1 和 z_2 分别为两齿轮的齿数。

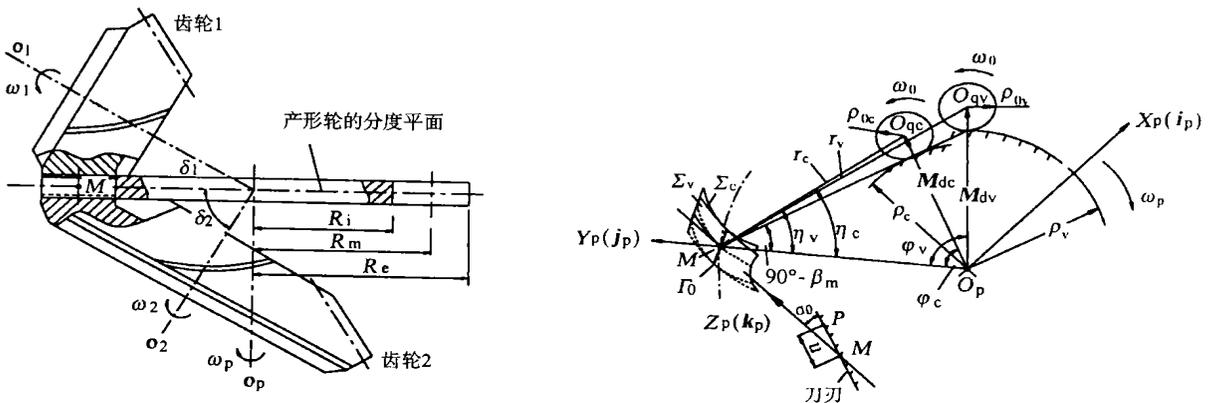


图1 摆线齿锥齿轮啮合示意图

Fig. 1 Generating cutting process for epicycloidal bevel gear

1 产形轮齿面方程

如图1(b)所示, 建立一个随机床摇台一起转动的动坐标系 $S_p (O_p - X_p, Y_p, Z_p)$, 它对应的坐标架为: $O_p - i_p, j_p, k_p$ 。其中坐标平面 $O_p - X_p, Y_p$ 为产形轮的分度平面, 原点 O_p 位于产形轮的轴线上, Z_p 轴即摇台的轴线, 方向为 ω_p 的负方向, Y_p 轴通过参考点 M 。动坐标系 S_p 在初始位置时, 坐标平面 $O_p - X_p, Y_p$ 与两齿轮轴线所决定的平面 (轴 $o_1 o_2$) 重合。

当刀刃经过参考点 M 时, 其上任意一点 P 在坐标系 S_p 内的矢径可表示为: $M_{dv} + r_v + u$ 。

刀刃离开参考点 M , 相当于它随摇台转过了一角度 θ , 同时又绕自身轴线沿同方向转过 $i_{0p}\theta$ 角, 总的转角为 $(1 + i_{0p})\theta$ 。这时 M_{dv} 绕 k_p 旋转角度 θ , r_v 和 u 沿同方向旋转了角度 $(1 + i_{0p})\theta$ 。

若把矢量的旋转运算记为: $b = a (\omega, \varepsilon)^R$, 其中 b 为 a 绕单位矢量 ω 转过 ε 角后形成的新矢量。那么刀刃任意位置时, 其上任意一点 P 的矢

径 r_{pv} 可以表示为:

$$r_{pv} = M_{dv} (k_p, \theta)^R + (r_v + u) [k_p, (1 + i_{0p})\theta]^R \quad (3)$$

式中: $M_{dv} = M_{dv} (\sin \varphi_v i_p + \cos \varphi_v j_p)$,

$r_v = r_v (-\sin \eta_v i_p + \cos \eta_v j_p)$ 。

u 为从参考点 M 到刀刃上 P 点的矢径, 设 $u = \pm |u|$, 当 P 它位于 Z_p 轴的正方向时取正值, 反之取负值。则: $u = u (\sin \alpha_0 \cos \beta_m i_p - \sin \alpha_0 \sin \beta_m j_p + \cos \alpha_0 k_p)$, 其中: β_m 是产形轮齿线在参考点处的螺旋角, 也称为齿轮的螺旋角, α_0 是刀具齿形角。

θ 为有向角, 逆时针方向为正, 顺时针方向为负, 再令 $k = (1 + i_{0p})$, 可以得到:

$$M_{dv} (k_p, \theta)^R = M_{dv} [\sin (\varphi_v - \theta) i_p + \cos (\varphi_v - \theta) j_p]$$

$$r_v (k_p, k\theta)^R = r_v [-\sin (\eta_v + k\theta) i_p + \cos (\eta_v + k\theta) j_p]$$

$$u (k_p, k\theta)^R = u [\sin \alpha_0 \cos (\beta_m - k\theta) i_p -$$

$$\sin \alpha_0 \sin (\beta_m - k\theta) \mathbf{j}_p + \cos \alpha_0 \mathbf{k}_p)$$

于是:

$$\mathbf{r}_{pv} = X_v \mathbf{i}_p + Y_v \mathbf{j}_p + Z_v \mathbf{k}_p \quad (4)$$

其中:

$$\begin{cases} X_v = M_{dv} \sin (\varphi_v - \theta) - r_v \sin (\eta_v + k\theta) + u \sin \alpha_0 \cos (\beta_m - k\theta) \\ Y_v = M_{dv} \cos (\varphi_v - \theta) + r_v \cos (\eta_v + k\theta) - u \sin \alpha_0 \sin (\beta_m - k\theta) \\ Z_v = u \cos \alpha_0 \end{cases} \quad (5)$$

同样的,按上述一样的步骤, \$\Sigma_c\$ 上任一点 \$P\$ 的矢径 \$\mathbf{r}_{pc}\$ 可以表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{pc} = X_c \mathbf{i}_p + Y_c \mathbf{j}_p + Z_c \mathbf{k}_p \quad (6) \\ X_c = M_{dc} \sin (\varphi_c - \theta) - r_c \sin (\eta_c + k\theta) + u \sin \alpha_0 \cos (\beta_m - k\theta) \\ Y_c = M_{dc} \cos (\varphi_c - \theta) + r_c \cos (\eta_c + k\theta) - u \sin \alpha_0 \sin (\beta_m - k\theta) \\ Z_c = u \cos \alpha_0 \end{cases} \quad (7)$$

式(4)、(5)即为产形面 \$\Sigma_v\$ 在坐标系 \$S_p\$ 中的参数方程,式(6)、(7)即为产形面 \$\Sigma_c\$ 在坐标系 \$S_p\$ 中的参数方程,若只考虑直线刀刃部分,那么 \$-h_a^* m_n \le u \le h_a^* m_n\$.

2 产形面与被切齿面间的啮合函数

因为 \$\Sigma_v\$ 和 \$\Sigma_c\$ 的有效部分都是由直线刀刃的轨迹所形成的直纹面,所以它们和齿轮1的凹齿面或齿轮2的凸齿面啮合时的单位公法线向量为^[5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{v1} = \mathbf{n}_{v2} = & -\cos \alpha_0 \cos (\beta_m - k\theta) \mathbf{i}_p + \\ & \cos \alpha_0 \sin (\beta_m - k\theta) \mathbf{j}_p + \sin \alpha_0 \mathbf{k}_p \end{aligned} \quad (8)$$

另外,在动坐标系 \$S_p\$ (\$O_p - X_p, Y_p, Z_p\$) 中:

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \omega_1 (\cos \delta_1 \sin \varphi_p \mathbf{i}_p - \cos \delta_1 \cos \varphi_p \mathbf{j}_p - \sin \delta_1 \mathbf{k}_p) \\ \omega_p = & -\omega_p \mathbf{k}_p = -\omega_1 \sin \delta_1 \mathbf{k}_p \end{aligned}$$

产形面 \$\Sigma_v\$ 与左旋齿轮1凹齿面啮合时,在啮合点 \$P\$ 处两者的相对速度为:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{p1} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_1 = & (\omega_p - \omega_1) \times \mathbf{r}_{pv} \\ \mathbf{V}_{p1} = & \omega_1 \cos \delta_1 (-\sin \varphi_p \mathbf{i}_p + \cos \varphi_p \mathbf{j}_p) \times \\ (X_v \mathbf{i}_p + Y_v \mathbf{j}_p + Z_v \mathbf{k}_p) = & \omega_1 \cos \delta_1 [Z_v (\cos \varphi_p \mathbf{i}_p + \\ \sin \varphi_p \mathbf{j}_p) - (\cos \varphi_p X_v + \sin \varphi_p Y_v) \mathbf{k}_p] \end{aligned}$$

将(5)式代入,并令 \$\Phi_v = \varphi_v - \theta, I_v = \eta_v + k\theta, B_m = \beta_m - k\theta\$, 化简后可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{p1} = & \omega_1 \cos \delta_1 \{ u \cos \alpha_0 (\cos \varphi_p \mathbf{i}_p + \sin \varphi_p \mathbf{j}_p) - \\ [M_{dv} \sin (\Phi_v + \varphi_p) - r_v \sin (I_v - \varphi_p) + \\ u \sin \alpha_0 \cos (B_m + \varphi_p)] \mathbf{k}_p \} \end{aligned} \quad (9)$$

同理,产形面 \$\Sigma_c\$ 与右旋齿轮2凸齿面啮合时,在啮合点 \$P\$ 两者的相对速度为:

$$\mathbf{V}_{p2} = (\omega_p - \omega_2) \times \mathbf{r}_{pc} =$$

$$\begin{aligned} \omega_2 \cos \delta_2 (\sin \varphi_p \mathbf{i}_p - \cos \varphi_p \mathbf{j}_p) \times (X_c \mathbf{i}_p + Y_c \mathbf{j}_p + \\ Z_c \mathbf{k}_p) = -\omega_2 \cos \delta_2 [Z_c (\cos \varphi_p \mathbf{i}_p + \sin \varphi_p \mathbf{j}_p) - \\ (\cos \varphi_p X_c + \sin \varphi_p Y_c) \mathbf{k}_p] \end{aligned}$$

将(7)式代入,并令 \$\Phi_c = \varphi_c - \theta, I_c = \eta_c + k\theta\$, 化简后可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{p2} = & -\omega_2 \cos \delta_2 \{ u \cos \alpha_0 (\cos \varphi_p \mathbf{i}_p + \sin \varphi_p \mathbf{j}_p) - \\ [M_{dc} \sin (\Phi_c + \varphi_p) - r_c \sin (I_c - \varphi_p) + \\ u \sin \alpha_0 \cos (B_m + \varphi_p)] \mathbf{k}_p \} \end{aligned} \quad (10)$$

产形面 \$\Sigma_v\$ 与齿轮1左旋凹齿面啮合时,根据齿轮啮合原理,在任意啮合点 \$P\$ 必定满足啮合方程^[5]: \$\mathbf{n}_{v1} \cdot \mathbf{V}_{p1} = 0\$, 由(8)式和(9)式得:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{v1} \cdot \mathbf{V}_{p1} = & -\omega_1 \cos \delta_1 [u \cos (B_m + \varphi_p) + \\ \sin \alpha_0 M_{dv} (\Phi_v + \varphi_p) - \sin \alpha_0 r_v \sin (I_v - \varphi_p)] \\ \text{即:} \\ u = & \frac{-\sin \alpha_0 [M_{dv} \sin (\Phi_v - \theta + \varphi_p) - r_v \sin (\eta_v + k\theta - \varphi_p)]}{\cos (\beta_m - k\theta + \varphi_p)} \end{aligned} \quad (11)$$

产形面 \$\Sigma_c\$ 与右旋大齿轮2凸齿面相啮合时,在任意的啮合点 \$P\$ 必定满足啮合方程: \$\mathbf{n}_{c2} \cdot \mathbf{V}_{p2} = 0\$, 把(8)式、(10)式代入,经化简得:

$$\begin{aligned} u = & \frac{-\sin \alpha_0 [M_{dc} \sin (\varphi_c - \theta + \varphi_p) - r_c \sin (\eta_c + k\theta - \varphi_p)]}{\cos (\beta_m - k\theta + \varphi_p)} \end{aligned} \quad (12)$$

(11)式和(12)式就是 \$\Sigma_v\$ 与左旋齿轮1的凹齿面间,产形面 \$\Sigma_c\$ 与右旋齿轮2凸齿面间的啮合函数.每给定一个 \$\varphi_p\$ 值,即在某一确定时刻,分别可以得到一个关于参变量 \$u\$ 和 \$\theta\$ 的关系式,参变量 \$u\$ (\$-h_a^* m_n \le u \le h_a^* m_n\$) 和 \$\theta\$ (在产形面的内、外圆之间)一一对应, \$\Sigma_v\$ 与左旋齿轮1的凹齿面间,产形面 \$\Sigma_c\$ 与右旋齿轮2凸齿面间都是线接触.

3 重合度

在两齿轮的啮合过程中,齿轮1的凹齿面和齿轮2的凸齿面始终位于假想产形面 \$\Sigma_v\$ 和 \$\Sigma_c\$ 的两侧,所以齿轮1和齿轮2的啮合点一定在 \$\Sigma_v\$ 和 \$\Sigma_c\$ 的切线上,也即在如图1(b)所示的直线 \$\Gamma_0\$ 上,它对应于(11)式和(12)式中 \$\theta = 0\$ 的情形,即:

$$\begin{aligned} u = & \frac{-\sin \alpha_0 [M_{dv} \sin (\varphi_v + \varphi_p) - r_v \sin (\eta_v - \varphi_p)]}{\cos (\beta_m + \varphi_p)} = \\ & \frac{-\sin \alpha_0 [M_{dc} \sin (\varphi_c + \varphi_p) - r_c \sin (\eta_c - \varphi_p)]}{\cos (\beta_m + \varphi_p)} \end{aligned}$$

如图 1 (b) 所示, 进一步可得:

$$u = \frac{-R_m \sin \alpha_0 \sin \varphi_p}{\cos (\beta_m + \varphi_p)} \quad (13)$$

或者写为:

$$\tan \varphi_p = \frac{u \cos \beta_m}{u \sin \beta_m - R_m \sin \alpha_0} \quad (14)$$

(13) 式和 (14) 式就是左旋摆线齿锥齿轮凹齿面与右旋齿轮凸齿面啮合时的啮合方程, 图 2 为 φ_p 与 u 的关系曲线。从图中可以看出, 在接触区域, φ_p 与 u 之间是单调变化的。因此, 将 $u_{\max} = h_a^* \cdot m_n$ 和 $u_{\min} = -h_a^* \cdot m_n$ 代入 (14) 式, 可以算出相应的产形轮的转角:

$$\Delta \varphi_p = a \tan \left[\frac{h_a^* m_n \cos \beta_m}{R_m \sin \alpha_0 - h_a^* \cdot m_n \sin \beta_m} \right] - a \tan \left[\frac{h_a^* m_n \cos \beta_m}{h_a^* \cdot m_n \sin \beta_m - R_m \sin \alpha_0} \right] \quad (15)$$

于是可以近似地将重合度的近似计算公式表示如下:

$$\varepsilon = \frac{z_p}{360} \cdot \Delta \varphi_p \quad (16)$$

代入文献 [1], 可以算出其重合度 $\varepsilon = 1.5001$ 。

4 结束语

齿轮副的啮合质量是由其齿面的几何特征决定

的, 本文通过建立摆线齿产形轮齿面矢量方程, 并对其进行的啮合理论分析, 导出摆线齿锥齿轮的加工中相应的产形面的参数方程、相应的啮合函数, 进一步得出摆线齿锥齿轮副的重合度的近似计算公式。

以上的分析、研究是以左旋锥齿轮推动右旋锥齿轮为例的, 但结果同样适用于右旋摆线齿锥齿轮推动左旋锥齿轮的情形, 只是前者的, 而后者反之。这些结论对摆线齿锥齿轮的生产加工具有一定的实际意义。

参考文献:

- [1] 齿轮手册编委会. 齿轮手册 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [2] 齿轮制造手册编委会. 齿轮制造手册 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- [3] 邹, 张文祥, 张友良. 克林贝格锥齿轮的计算机模拟加工 [J]. 机械科学与技术, 2003, 22 (3): 37-39.
- [4] 邹, 克林贝格锥齿轮的加工及特点 [J]. 机械工程师, 2004, 11: 40-41.
- [5] 吴序堂. 齿轮啮合原理 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1984.