第18卷第2期 江苏工业学院学报 Vol. 18 No. 2
2006年6月 JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY Jun. 2006

文章编号：1005-8893(2006)02-0049-04

一类具功能反应的3种群模型的脉冲控制①

胡彩霞，李医民
(江苏大学 理学院，江苏 镇江 212013)

摘要：利用脉冲系统的线性近似判定的方法对一个具有功能反应函数为$\sqrt{x}$的食饵-捕食者3种群捕食链生物模型进行了研究，通过脉冲控制得到了使原先不稳定的正平衡点渐近稳定的充分条件，从而使该种群达到了一个新的适宜各物种持续共存、发展的稳定状态，并通过实例进行了证明。最后给出了生态解释。

关键词：生态系统；脉冲微分方程；脉冲控制
中图分类号：O 141 文献标识码：A

Impulsive Control of a Three-Species System with Functional Reaction

HU Cai-xia, LI Yi-min
(College of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: This paper studied a predator-prey ecosystem with functional reaction function $\sqrt{x}$ by using the linear approximate method of impulsive control system. Then it gave the sufficient condition for this system's unstable positive equilibrium to approach asymptotic stability by the impulsive control. So the species arrived at a new stable state in which they could sustainably develop. And an example was given to prove this method. Finally, the paper gave the ecological explanation.

Key words: ecological system; impulsive differential equation; impulsive control

当生物控制被自然和人类成功完成时，许多受欢迎的数学模型得以建立，留下了人们控制自然的足迹，使自然按有利于人类生存的方向发展。文献[1～6]分别利用不同的控制手段研究了种群生态模型的几类控制问题，使更多的控制理论方法融入生态学中，同时生态学也为控制理论提供了应用平台，促进了两门学科的进一步融合。

在自然界中，生态系统种群内部以及种群之间的关系是非常复杂的，如竞争，互惠，捕食等。文献[6]研究了一类具有功能反应函数为$\sqrt{x}$的捕食-被捕食两种群生物模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 g(x_1) - \Phi(x_1) x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 [-d + e\Phi(x_1)] \end{cases} \quad (1)$$

食饵种群的相对增长率为非线性情形：

$g(x_1) = a - bx^m$，$(a>0,\ b>0,\ 0<m<1)$；

捕食率也为非线性情形：

$\Phi(x_1) = cx_1^{\theta}$，$(c>0,\ 0<\theta<1)$

(文中取 $m=\theta=\frac{1}{2}$，$a=c=1$)，通过脉冲控制使其渐近稳定。然而生物种群的捕食与被捕食关系是普遍存在的，它不仅仅是两种群之间的相互作用，而且往往是多个种群间的相互作用。为了更广泛的描绘和控制生态系统，本文在文献[6]的基础上进一

① 收稿日期：2005-11-22
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(60234010)
作者简介：胡彩霞(1981-)，女，山东烟台人，硕士研究生，研究方向：生物数学、模糊控制。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

步研究具有功能反应函数为$\sqrt{x}$的食饵 - 捕食 3 种群生态模型的脉冲控制问题。为此，本文考虑下面模型[7]：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 g(x_1) - \Phi_1(x_1)\,x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2[-r + c\Phi_1(x_1)] - \Phi_2(x_2)\,x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3[-s + d\Phi_2(x_2)]\end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$ 分别表示种群Ⅰ、种群Ⅱ、种群Ⅲ的种群密度，r，c，d，s 为正常数。系统 (2) 中 3 种群的关系是：3 种群之间仅有捕食与被捕食关系，且捕食者种群的功能性反应函数为与被捕食者种群密度成非线性的情况：

$\Phi_1(x_1) = e x_1^{\theta_1}$，$\Phi_2(x_2) = f x_2^{\theta_2}$，

以及捕食者的相对增长率也为非线性情况：

$g(x_1) = a - b x_1^m$。

文献 [7] 讨论了这一 3 种群捕食链系统的平衡点的局部稳定性，并给出了平衡点不稳定的条件，表明了多种群生存的复杂性。

不失一般性，令 $m = \theta_1 = \theta_2 = 1/2$，$a = e = f = 1$，可得下面的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1(1 - b\sqrt{x_1}) - \sqrt{x_1}\,x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2(-r + c\sqrt{x_1}) - \sqrt{x_2}\,x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3(-s + d\sqrt{x_2})\end{cases} \quad (3)$$

本文将利用脉冲控制理论中对脉冲系统的线性近似判定的方法研究该模型正平衡点的渐近稳定性。

1 预备知识

考虑以下的脉冲微分系统

$$\begin{aligned}&\dot{X} = A(t)X + g(t, X),\ t \neq \tau_k \\ &\Delta X = B_k X,\ t = \tau_k,\ k = 1, 2, \cdots\end{aligned} \quad (4)$$

其中 $X \in R^n$；$A(t) \in R^{n\times n}$；$g: R_+ \times R^n \to R^n$。

令 $\Phi(t, x)$ 为下列 ODE 的基解矩阵

$$\dot{X} = A(t)X \quad (5)$$

定义 1 脉冲控制：给定一个系统 P，$X \in R^n$ 是其状态变量，一个控制时刻的集合 $T = \{\tau_k\}$，$\tau_k \in R$，$\tau_k < \tau_{k+1}$，$k = 1, 2, \cdots$，在每一个时刻 τ_k，X 按照 $X(\tau_k^+) = X(\tau_k^-) + U(k, X)$ 的规则有一个脉冲突变，并且输出 $Y = f(X)$，$f: R^n \to R^m$，$Y \in R^m$，当 $k \to \infty$ 时，Y 逼近空间 R^m 中的 1 个固定点 Y^*。

定理 1[8] 如果下列条件成立：①$A(t) \in PC(R_+, R^{n\times n})$；②当 $\tau_{k-1} \le s \le t \le \tau_k$，$k \in N$ 时，$\|\Phi(t, s)\| \le \phi(t)\chi(s)$。其中 $\phi(\cdot)$，$\chi(\cdot) \in PC(R_+, R)$，$\phi(t) > 0$，$\chi(t) > 0$，$\phi(\tau_k^+) > 0$，$\chi(\tau_k^+) > 0$，$t \in R_+$，$k \in N$；③函数 $g(t, x)$ 连续且在 $(\tau_{k-1}, \tau_k] \times R^n$，$k \in N$ 上对于 x 局部 Lipschitzian 连续，对每一个 k 和 $y \in R^n$，$(t, x) \to (\tau_k, y)$，$t > \tau_k$ 时 $g(t, x)$ 的极限存在；④在域 $R_+ \times R^n$ 上，下列不等式成立：$\|g(t, x)\| \le \alpha(t)\|x\|^m$，此处 $m > 1$ 是常数，函数 $\alpha(\cdot) \in PC(R_+, R)$ 是非负的；⑤$\|I + B_k\| \le \gamma_k$，此处 $\gamma_k \ge 0$ 是 1 个常数；⑥$D(0, \infty) \triangleq \int (\prod_{0<\tau_k<s} r_k)^{m-1} \phi^m(s)\chi(s)\alpha(s)\,ds < \infty$，此处 $r_k = \gamma_k \phi(\tau_k)\chi(\tau_k^+)$；⑦对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \in R_+$，存在 1 个 $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0)$ 使得 $\phi(t) \prod_{0<\tau_k<s} r_k < \varepsilon$，$t \ge t_0 + \sigma$，那么系统 (4) 的解 $x = 0$ 是渐近稳定的。

2 主要结果

对系统 (3) 做变换 $\overline{x_1} = \sqrt{x_1}$，$\overline{x_2} = \sqrt{x_2}$，$\overline{x_3} = x_3$，且变换后 $\overline{x_1}$，$\overline{x_2}$，$\overline{x_3}$ 仍用 x_1，x_2，x_3 表示，记 $A_0 = s$，$A_1 = d/s$，得

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 1/2\,(x_1 - b x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = 1/2\,(-r x_2 + c x_1 x_2 - x_3) \\ \dot{x}_3 = A_0 x_3(-1 + A_1 x_2)\end{cases} \quad (6)$$

定理 2[7] 如果下面条件满足：①$g(0) = a > 0$，当 $x_1 > 0$ 时，对所有的 x_1 有 $g' \le 0$；而且存在 $K > 0$ 使 $g(K) = 0$；②$\Phi_1(0) = 0$，当 $x_1 > 0$ 时，对所有的 x_1 有 $\Phi_1' > 0$；③$\Phi_2(0) = 0$，当 $x_2 > 0$ 时，对所有的 x_2 有 $\Phi_2 > 0$。则系统 (3) 在 R_3^+ 中的解有界。

从生态的角度来说，由模型 (3) 和定理 2 中的条件 ①知，当捕食者种群 x_2 和 x_3 不存在时，资源 x_1 是密度制约的，也即受环境约束，资源必为有限的，那么，显然所能养活的捕食者种群也是有限的。故系统 (3) 在 R_3^+ 中的解有界。

由于系统 (3) 的参数 b，r，c，s，d 均为正常数，函数 $g(x_1)$，$\Phi_1(x_1)$，$\Phi_2(x_2)$ 分别满足定理 2 中的条件 ①～③，所以系统 (6) 在 R_3^+ 内可有 4 个平衡点：$O(0, 0, 0)$，$E_1(1/b, 0, 0)$ 和 $E_2\left(\frac{r}{c}, \frac{\sqrt{cr - br^2}}{c}, 0\right)$ 及正平衡点 $E_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$。其中 x_1^*，x_2^*，x_3^* 满足的方程为：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} x_1 - bx_1^2 - x_2^2 = 0 \\ -rx_2 + cx_1x_2 - x_3 = 0 \\ -1 + A_1x_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

解得

$x_1^* = \dfrac{A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4b}}{2bA_1}$，$x_2^* = \dfrac{1}{A_1}$，

$x_3^* = \dfrac{c(A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4b}) - 2brA_1}{2bA_1^2}$。

下面研究不稳定正平衡点 $E_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$。

令 $e_1 = x_1 - x_1^*$，$e_2 = x_2 - x_2^*$，$e_3 = x_3 - x_3^*$，加上脉冲控制 $\Delta e_X = B_k e_X$，$e_X = (e_1, e_2, e_3)^T$ 后，系统（6）可改写为：

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - bx_1^* & -x_2^* & 0 \\ \frac{c}{2}x_2^* & \frac{cx_1^* - r}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & A_0A_1x_3^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{be_1^2 + e_2^2}{2} \\ \frac{c}{2}e_1e_2 \\ A_0A_1e_2e_3 \end{bmatrix}, \quad t \neq \tau_k$$

$$\Delta e_X = B_k e_X, \quad t = \tau_k \tag{8}$$

其中 A，g（X），B_k 分别表示如下：

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - bx_1^* & -x_2^* & 0 \\ \frac{c}{2}x_2^* & \frac{cx_1^* - r}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & A_0A_1x_3^* & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(X) = \begin{bmatrix} -\frac{be_1^2 + e_2^2}{2} \\ \frac{c}{2}e_1e_2 \\ A_0A_1e_2e_3 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}。$$

定理 3 假设 $\{\tau_k\}$ 是等距的，间隔设为 $\overline{\omega} > 0$，令 λ_1 为矩阵 A 的最大特征根。

令 $r_k = \|I + B_k\|_2 \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2$，$r = \max\{r_k\}$，$k = 1, 2, \cdots, \lfloor t/\overline{\omega} \rfloor$。

其中 $A = PJP^{-1}$，J 是矩阵 A 的 Jordan 形，$-1 < B_1 < 0$，$-1 < B_2 < 0$，$-1 < B_3 < 0$。

如果条件 $\lambda_1 t + \lfloor t/\overline{\omega} \rfloor \ln r < 0$，对 $t > \tau_1$ 成立，则系统（6）的正平衡点 $E_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 是渐近稳定的。

证明 从系统（7）得到

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - bx_1^* & -x_2^* & 0 \\ \frac{c}{2}x_2^* & \frac{cx_1^* - r}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & A_0A_1x_3^* & 0 \end{bmatrix}$$

由此得到定理 1 的条件①满足。

又 $g(t, X) = \begin{bmatrix} -\frac{be_1^2 + e_2^2}{2} \\ \frac{c}{2}e_1e_2 \\ A_0A_1e_2e_3 \end{bmatrix}$ 是连续的且对于 x 局部 Lipschitzian 连续，所以定理 1 的条件③满足。

当 $m = 2$ 时，又可得到

$$\|g(t, x)\| \leq \left(\left|\frac{b+1}{2}\right| + \left|\frac{c}{2}\right| + |A_0A_1| \right) \|x\|^2$$

此时设 $\alpha(t) = \left|\frac{b+1}{2}\right| + \left|\frac{c}{2}\right| + |A_0A_1|$，则定理 1 的条件④满足。

而 $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$，$\|e^{A(t-s)}\|_2 = \|Pe^{J(t-s)}P^{-1}\|_2 \leq \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 \|e^{J(t-s)}\|_2 \leq \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 e^{\lambda_1(t-s)}$

这里 λ_1 是矩阵 A 的最大特征根。

又可以得到 $\|\Phi(t, s)\|_2 \leq \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 s}$，取 $\phi(t) = \|P\|_2 e^{\lambda_1 t}$ 和 $\chi(s) = \|P^{-1}\|_2 e^{-\lambda_1 s}$，故定理 1 的条件②满足。

当 $m = 2$ 时，

$$D(0, \infty) = \int_0^\infty \Big(\prod_{0 < \tau_k < s} r_k\Big)^{m-1} \phi^m(s)\chi(s)\alpha(s)\,ds \leq$$

$$\int_0^\infty r^{n(s,0)} \|P\|_2^2 e^{2\lambda_1 s} \|P^{-1}\|_2 e^{-\lambda_1 s} \left(\left|\frac{b+1}{2}\right| + \left|\frac{c}{2}\right| + |A_0A_1| \right) ds =$$

$$\int_0^\infty r^{n(s,0)} \|P\|_2^2 \|P^{-1}\|_2 e^{\lambda_1 s} \left(\left|\frac{b+1}{2}\right| + \left|\frac{c}{2}\right| + |A_0A_1| \right) ds =$$

$$\int_0^\infty \|P\|_2^2 \|P^{-1}\|_2 e^{\lambda_1 s + n(s,0)\ln r} \left(\left|\frac{b+1}{2}\right| + \left|\frac{c}{2}\right| + |A_0A_1| \right) ds$$

这里 $n(s, 0) = \sup k = \lfloor t/\overline{\omega} \rfloor$。

显然，假如 $\lambda_1 s + n(s, 0)\ln r < 0$ 成立的话，定理 1 的条件⑥满足。

又 $\lambda_1 s + n(s, 0)\ln r < 0$ 成立，则可以得到

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\phi(t)\prod_{0<\tau_k<t} r_k \le \|P\|_2 e^{\lambda_1 t}\prod_{0<\tau_k<t} r =$

$\|P\|_2 \exp(\lambda_1 t + n(t,0)\ln r) < \varepsilon$

故定理 1 的条件 ⑦也满足。

而 $\|I + B_k\| = \rho(I + B_k) \le \gamma_k$，$(\gamma_k \ge 0)$，因而条件 ⑤满足。

可知系统 (8) 的原点是渐近稳定的。

由以上证明及定理 1 可知定理 3 成立。

从而系统 (6) 的正平衡点 $E_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 是渐近稳定的。

例 取系统 (8) 中 $b = 1/4$，$c = 7$，$r = 1$，$A_0 = 1$，$A_1 = 1$，则 $x_1^* = 2$，$x_2^* = 1$，$x_3^* = 13$，$\lambda_1 = 4$，

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -8 & -5 & 0 \\ -26 & -26 & 14 \end{bmatrix}, \quad g(t, X) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{e_1^2 + 4e_2^2}{8} \\ \frac{7}{2}e_1 e_2 \\ e_2 e_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha(t) = \frac{41}{8}，当\ m = 2\ 时，$$

$\|g(t, x)\| \le \alpha(t)\|x\|^2 = \frac{41}{8}\|x\|^2$，

$\phi(t) = \|P\|_2 e^{\lambda_1 t} = 40.329\,2 e^{4t}$，

$\chi(s) = \|P^{-1}\|_2 e^{-\lambda_1 s} = 0.767\,4 e^{-4s}$，从而

$\|\Phi(t, s)\|_2 \le \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 s} = \phi(t)\chi(s)$。

$$取\ B_k = \begin{bmatrix} -0.97 & 0 & 0 \\ 0 & -0.99 & 0 \\ 0 & 0 & -0.97 \end{bmatrix},$$

$\overline{\omega} = 0.01$，$\gamma_k = 1$，$t = 4$，则

$\|I + B_k\| = \rho(I + B_k) = 0.03 \le 1$，

$r_k = \|I + B_k\|_2 \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 = 0.928\,5$，

$r = \max\{r_k\} = 0.928\,5$，

$\lambda_1 t + n(t, 0)\ln r = \lambda_1 t + \lfloor t/\overline{\omega} \rfloor \ln r =$

$4 \times 4 + \lfloor 4/0.01 \rfloor \times \ln 0.928\,5 = -13.674\,0 < 0$

$D(0, \infty) \le$

$\int \left(40.329\,2^2 \times 0.767\,4 \times \frac{41}{8}\right) e^{-13.674\,0} =$

$\int 639\,6.683\,7 e^{-13.674\,0} < \infty$，

$\phi(t)\prod_{0<\tau_k<t} r_k \le 40.329\,2 e^{-13.674\,0} < \varepsilon$。

由定理 1 和定理 3 可知，系统 (8) 原点渐近稳定。

3 结 论

通过上面的证明和举例可知，利用脉冲控制可以有效的控制所研究的生态系统的稳定性。系统的不稳定正平衡点变成了渐近稳定的点，最终使该种群达到了一个新的适宜各物种持续共存、发展的稳定状态。

参考文献:

[1] 赵立纯，张庆灵，杨启昌. Lotka - Volterra 捕食 - 被捕食系统的脉冲控制 [J]. 生物数学学报，2002，17 (9)：38 - 47.

[2] 赵立纯，张庆灵，杨启昌. Optimal Impulsive Harvesting For Fish Populations [J]. Journal of System Science and Complexity，2003，16 (4)：467 - 474.

[3] 赵立纯，张庆灵，杨启昌. 三种群食物链系统的耗散性控制 [J]. 生物数学学报，2003，18 (1)：82 - 92.

[4] 赵立纯，张庆灵，杨启昌. Induction Control of a Two - Species Competitive System [J]. 生物数学学报，2003，18 (3)：262 - 268.

[5] 陈狄岚，孙继涛. 一类生态系统的脉冲控制 [J]. 生物数学学报，2003，18 (4)：406 - 410.

[6] 许斌，陈狄岚，孙继涛. 一类具有功能反应的生物捕食系统的脉冲控制 [J]. 生物数学学报，2004，19 (1)：77 - 81.

[7] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法 [M]. 北京：科学出版社，1988.

[8] Lakshmikantham V，Bainov D D，Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. New York：World Scientific，1989. 57 - 127.

[9] 欧阳军，杨德全. 功能反应函数为 $\sqrt{x}$ 的食饵 - 捕食系统的定性分析 [J]. 生物数学学报，1998，13 (3)：329 - 333.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net