文章编号：1005－8893（2006）02－0059－02

一类退化方程组解的爆破①

刘玉清
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213164）

摘要：讨论一类退化抛物方程的 Dirichlet 问题，通过构造一个特殊的下解证明了解具有爆破性质并得到了爆破时间的估计，同时对解在不同参数下的行为进行了研究。

关键词：退化；爆破；上下解
中图分类号：O 175.26　　文献标识码：A

Blow up for a Nonlinear Degenerate Parabolic Equation

LIU Yu－qing
(Department of Information Science，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213164，China)

Abstract: In this paper the degenerated parabolic equation subject to Dirichlet boundary condition is studied. By constructing a special positive lower solution the finite time blowup result，together with an estimate of the blowup time，is found. The other behaviors of the equation in different parameters is also investigated.

Key words: degenerate；blow－up；super and lower solutions

抛物型方程（组）解的性质如爆破，死灭，渐进行为甚至界的估计一直受到人们的关注，所用方法也多种多样。如能量方法[1]，上下解方法[2]，迭代法[3]，极值原理[4]等等。其中上下解方法是常用方法之一，它一般用同一区域 Laplace 算子特征值问题的第一特征函数来构造上下解，经过比较得出结论。本文考虑一类退化抛物方程解的爆破性质，直接构造了一种下解，并对这一类方程解在不同参数下的行为作一些讨论。

考虑问题（P）：

$$\begin{cases} \partial_t u = u^p\left(\Delta u + |u|^{\beta-1}u\right), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_0(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是有界光滑区域。当 $\beta = 1$ 时则为[2,5]所涉及问题，此时，括弧中是线性项。本文主要结论为：

定理 1：设 $p > 1$，$\beta > 1$，$u_0(x) \geqslant 0$，但 $u_0(x) \not\equiv 0$ 则问题（P）的解必在有限时间 T^* 内爆破，且有 T^* 的估计：$T^* \leqslant \dfrac{\int_\Omega u_0^{1-p}\varphi_0 \mathrm{d}x}{(p-1)(1-\lambda)\|\varphi_0\|_{1+\beta}^{1+\beta}}$。

φ_0 是某个确定的函数，其定义见下文。

定理 2：若 $0 < p < 1$ 则当 β 也足够小使 $0 < p + \beta \leqslant 1$ 时（1）式的解不会爆破。

1 正解的存在性

考虑辅助问题（P_ε）：

① 收稿日期：2005－11－21

作者简介：刘玉清（1966－），男，江苏常州人，在职博士，主要研究偏微分方程解的存在性及性质。

$$\begin{cases}\partial_t u_\varepsilon = f_\varepsilon(u)(\Delta u + |u_\varepsilon|^{\beta-1}u_\varepsilon), & x\in\Omega,\ t\in(0, T)\\ u_\varepsilon(x, t)=\varepsilon, & x\in\partial\Omega,\ t\in(0, T)\\ u_\varepsilon(x, 0)=u_0(x)+\varepsilon, & x\in\Omega\end{cases} \tag{2}$$

其中 $f_\varepsilon(u)=\begin{cases}u^p & (u\geqslant\varepsilon)\\ \varepsilon^p & (u<\varepsilon)\end{cases}$。则（$P_\varepsilon$）是非退化问题，易证其解存在，设最大存在区间为（$0, T_\varepsilon$），其中 $T_\varepsilon\leqslant+\infty$[2]，记此解为 u_ε，显然 $u_\varepsilon\geqslant\varepsilon$。关于解的性质引用下述引理：

引理 1[2]：设 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$，则 $u_{\varepsilon_1}\geqslant u_{\varepsilon_2}$，$T_{\varepsilon_1}\leqslant T_{\varepsilon_1}$。

说明：（P_ε）的解是单调的，因此让 $\varepsilon\to0^+$，得问题（P）的解，且满足 $u\geqslant0$。

引理 2：下述辅助问题有正下解 φ_0，从而当 $\lambda<1$，$u_0(x)\geqslant\varphi_0$ 但 $u_0(x)\not\equiv\varphi_0$ 时问题（P）有同样正下解。

$$\begin{cases}-\Delta v=\lambda v^\beta, & x\in\Omega\\ v(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{3}$$

证明：令 $w_\varepsilon=u_\varepsilon-\varphi_0$，则

$\partial_t w_\varepsilon-u_\varepsilon^p\Delta w_\varepsilon=u_\varepsilon^p(\Delta\varphi_0+u_\varepsilon^\beta)-\partial_t\varphi_0\geqslant$
$u_\varepsilon^p(-\lambda\varphi_0^\beta+u_\varepsilon^\beta)\geqslant u_\varepsilon^p(u_\varepsilon^\beta-\varphi_0^\beta)\geqslant u_\varepsilon^p\beta\zeta^{\beta-1}w_\varepsilon$

其中 ζ 在 u_ε 与 φ_0 之间，利用 u_ε 的性质，可以证明 $w_\varepsilon\geqslant0$，让 $\varepsilon\to0^+$，则有 $u\geqslant\varphi_0$。

现证明（3）式有正下解。让 R 是 Ω 的所有内切圆中最小的一个的半径。取函数（$a>0$ 待定）：

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}a\exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2-R^2}\right\}, & |x|<R\\ 0, & |x|\geqslant R\end{cases} \tag{4}$$

求得

$$\Delta\varphi_0=\begin{cases}a\exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2-R^2}\right\}\dfrac{8|x|^2(|x|^2-R^2)+4|x|^2-2n(|x|^2-R^2)^2}{(|x|^2-R^2)^4}, & |x|<R\\ 0, & |x|\geqslant R\end{cases} \tag{5}$$

可见，$\varphi_0(x)$ 与 $\Delta\varphi_0(x)$ 都是 $|x|$ 的函数，$\Delta\varphi_0$ 的符号取决于 $8|x|^2(|x|^2-R^2)+4|x|^2-2n(|x|^2-R^2)^2$，当 $|x|$ 较小时 $\Delta\varphi_0<0$，当 $|x|$ 较大（但 $|x|\leqslant R$）时 $\Delta\varphi_0>0$。只讨论 $\Delta\varphi_0<0$ 的情况，因此必然可设 $|x|\leqslant r<R$，由式（5）知此时 $|\Delta\varphi_0|\leqslant ak/R^4$，$k$ 是某个常数。由于 $\beta>1$，$|x|\leqslant r<R$，总可选择 a 足够大使 $\Delta\varphi_0+\lambda\varphi_0^\beta>-\dfrac{ak}{R^4}+\lambda(ac)^\beta>0$ 成立。

2 定理的证明

定理 1 的证明：令 $F(t)=\int_\Omega\dfrac{u^{1-p}\varphi_0}{1-p}\mathrm{d}x$ 则可以求出

$F'(t)=\int_\Omega u^{-p}u_t\varphi_0\mathrm{d}x=\int_\Omega(\Delta u+u^\beta)\varphi_0\mathrm{d}x=$
$\int_\Omega(u^\beta\varphi_0+u\Delta\varphi_0)\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega(u^\beta\varphi_0-\lambda u\varphi_0^\beta)\mathrm{d}x=$
$\int_\Omega u\varphi_0(u^{\beta-1}-\lambda\varphi_0^{\beta-1})\mathrm{d}x\geqslant(1-\lambda)\int_\Omega\varphi_0^{\beta+1}\mathrm{d}x$

所以 $(1-\lambda)\|\varphi_0\|_{1+\beta}^{1+\beta}t\leqslant\dfrac{\int_\Omega u_0^{1-p}\varphi_0\mathrm{d}x}{p-1}$，从而解一定爆破并有估计式：

$$t\leqslant\frac{\int_\Omega u_0^{1-p}\varphi_0\mathrm{d}x}{(p-1)(1-\lambda)\|\varphi_0\|_{1+\beta}^{1+\beta}}\leqslant\frac{\|\varphi_0\|_{2-p}^{2-p}}{(p-1)(1-\lambda)\|\varphi_0\|_{1+\beta}^{1+\beta}}$$

定理 2 的证明：现在令 $F(t)=\int_\Omega\dfrac{u^{1-p}\varphi}{1-p}\mathrm{d}x$，其中 φ 是 Laplace 算子的第一特征函数。于是 $F'(t)=\int_\Omega(u^\beta\varphi-\lambda u\varphi)\mathrm{d}x$。由于 $\beta\leqslant1-p$ 故由 Hölder 及逆 Hölder 不等式知

$\int_\Omega u^\beta\varphi\mathrm{d}x\leqslant c_0\left(\int_\Omega u^{1-p}\varphi\mathrm{d}x\right)^{\frac{\beta}{1-p}}$，

$\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x\geqslant c_1\left(\int_\Omega u^{1-p}\varphi\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1-p}}$，

因此若令 $V(t)=\int_\Omega u^{1-p}\varphi\mathrm{d}x$ 则有 $V'\leqslant c_0V^\sigma-c_1V^\gamma$，$\sigma=\dfrac{\beta}{1-p}\leqslant1$，$\gamma=\dfrac{1}{1-p}>1$，$c_0$，$c_1>0$，由此可知不爆破。

参考文献：

[1] 顾永耕．抛物型方程组解的熄灭的充要条件［J］．数学学报，1994，37（1）：73－79.

[2] Chen H W．Analysis of Blow up for a Nonlinear Degerate Parabolic Equation［J］．J Math Anal Appl，1995，192：180－193.

[3] 刘玉清．抛物型方程组正解的存在性及解的迭代估计［J］．江苏工业学院学报，2004，16（1）：56－58.

[4] 戴求亿．半线性方程组的死灭现象Ⅱ［J］．应用数学学报，1997，20（1）：11－23.

[5] 张慧，刘浏，徐红英．一类退化抛物方程组正解的爆破［J］．四川师范大学学报，2005，28（2）：179－181.