文章编号: 1005 - 8893 (2006) 03 - 0046 - 03

线性规划对偶单纯形算法的改进*

郭淑娟[1], 涂庆伟[1], 徐惠益[2]
(1. 江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213164; 2. 常州信息职业技术学院)

摘要: 运用求解线性规划对偶单纯形算法原理, 进一步研究迭代过程中目标函数的变化。为了提高迭代效率, 引入了最好主元素的概念, 提出了对偶单纯形改进算法, 由于同时考虑了 Bland 法则, 该方法还可以避免循环。

关键词: 线性规划; 对偶单纯形法; 对偶单纯形最好主元素; 迭代
中图分类号: O 211.1　　　**文献标识码**: A

Improvement on the Dual Simplex Method about Linear Programming

GUO Shu - juan[1], TU Qing - wei[1], XU Hui - yi[2]
(1. Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Based on the principle of the dual simplex method about linear programming, the changes of the value of the objective function in iterations have been studied. To raise the effect of the iteration, the best pivot of the dual simplex method is put forward, and the improvement on the dual simplex method is given. To avoid cycling, Bland Rule should be used.

Key words: linear programming; dual simplex method; the best pivot of the dual simplex method; iteration

线性规划问题的通用解法有单纯形方法和对偶单纯形方法。在单纯形算法的应用中, 为了提高迭代效率, 人们提出了单纯形改进算法[1,2]。本文探讨对偶单纯性算法的改进。

1 单纯形方法与对偶单纯形方法

对线性规划问题

$$\max z = CX$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

其对偶问题为

$$\min w = b^{T} Y$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} A^{T} Y \ge C^{T} \\ Y \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

假设 $b \ge 0$, 用单纯形法列出初始单纯形表和最终单纯形表, 见表 1, 得最优解为 $X^{*} = (B^{-1}b, 0, 0)^{T}$, 目标函数最大值 $z^{*} = C_B B^{-1} b$。

表 1　线性规划问题 1 的初始和最终单纯形表

Table 1　The primary and the final simplex table of LP1

	$c_j \to$		C_B	C_N	0
基价值系数	基变量	右端项	X_B	X_N	X_s
0	X_s	b	B	N	I
	$\sigma_j \to$		C_B	C_N	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
	$\sigma_j \to$		0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$

由线性规划对偶问题的最优性定理[1], 同时得到 $Y^{*} = (C_B B^{-1})^{T}$ 为对偶问题 (2) 的最优解, 且 (2) 的目标函数最小值 $w^{*} = C_B B^{-1} b = z^{*}$。

* 收稿日期: 2005 - 12 - 02
作者简介: 郭淑娟 (1964 -), 女, 河南新乡人, 副教授, 主要从事数学教学与应用数学研究。

对于线性规划问题

$$\max z = CX$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

其对偶问题为

$$\min w = -b^{\mathrm{T}} Y$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} -A^{\mathrm{T}} Y \geq C^{\mathrm{T}} \\ Y \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

假设 $(C_B, C_N) \leq 0$，用对偶单纯形法列出初始单纯形表和最终单纯形表，见表 2，得最优解 (可行) 为 $X^* = (B^{-1}b, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，这里假定 $B^{-1}b \geq 0$，目标函数最大值 $z^* = C_B B^{-1} b$。

表 2　线性规划问题 3 的初始和最终单纯形表

Table 2　The primary and the final simplex table of LP3

$c_j \rightarrow$			C_B	C_N	0
基价值系数	基变量	右端项	X_B	X_N	X_s
0	X_s	$-b$	$-B$	$-N$	I
$\sigma_j \rightarrow$			C_B	C_N	0
C_B	X_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	$-B^{-1}$
$\sigma_j \rightarrow$			0	$C_N - C_B B^{-1} N$	$C_B B^{-1}$

由线性规划问题的最优性定理[3]，同时得到 $Y^* = -(C_B B^{-1})^{\mathrm{T}}$ 为对偶问题 (4) 的最优解，且 (4) 的目标函数最小值 $w^* = C_B B^{-1} b = z^*$。

2　线性规划对偶单纯形方法的改进

再来看对偶单纯形法的迭代过程，为了方便将问题 (3) 表述为问题 (1) 的形式，设具体表达式为

$$\max z = c_1 x_1 + \cdots + c_{n-m} x_{n-m} + \cdots + 0 x_n$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1,n-m} x_{n-m} + x_{n-m+1} = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{m,n-m} x_{n-m} + x_n = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

初始单纯形表见表 3。

表 3　线性规划问题 5 的初始单纯形表

Table 3　The primary simplex table of LP5

$c_j \rightarrow$			c_1	c_k	c_{n-m}	0	0	0
基价值系数	基变量	右端项	x_1	x_k	x_{n-m}	x_{n-m+1}	x_{n-m+l}	x_n
0	x_{n-m+1}	b_1	a_{11}	a_{1k}	$a_{1,n-m}$	1	0	0
0	x_{n-m+l}	b_l	a_{l1}	a_{lk}	$a_{l,n-m}$	0	1	0
0	x_n	b_m	a_{m1}	a_{mk}	$a_{m,n-m}$	0	0	1
$\sigma_j \rightarrow$			c_1	c_k	c_{n-m}	0	0	0

这里初始基本解 $X^0 = (0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$，目标函数值 $z^0 = 0$。当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 中有负值时，X^0 不是可行解，但是如果 $c_1, \cdots, c_{n-m} \leq 0$，则对偶问题可行，此时对偶变量 $Y = 0$，对偶问题的目标函数值 $w^0 = 0 = z^0$。

下面分析对偶单纯形法的迭代过程。令 $\min\{b_i | b_i < 0\} = b_l < 0$，确定对应的基变量 x_{n-m+l} 为换出变量。

在单纯形表中，若 b_l 所在行的各系数 $a_{lj} \geq 0$，则无可行解，停止计算。若存在 $a_{lj} < 0$，则计算 $\alpha = \min\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0, \sigma_j < 0\right\} = \frac{\sigma_k}{a_{lk}}$，并令 $\theta = \frac{b_l}{a_{lk}} > 0$

对应列的非基变量为 x_k 换入变量，以 a_{lk} 为主元素进行换基迭代，得到新的单纯形表 (表 4)。

表 4　表 3 的迭代表 (用 x_k 替换 x_{n-m+l} 作为基变量)

Table 4　The iterative table of table 3 (use x_k as basic variable replacing x_{n-m+l})

$c_j \rightarrow$			c_1	c_k	c_{n-m}	0	0	0
基价值系数	基变量	右端项	x_1	x_k	x_{n-m}	x_{n-m+1}	x_{n-m+l}	x_n
0	x_{n-m+1}	b'_1	a'_{11}	0	$a'_{1,n-m}$	1	0	0
0	x_k	b_l / a_{lk}	a_{l1} / a_{lk}	1	$a_{l,n-m} / a_{lk}$	0	$1/a_{lk}$	0
0	x_n	b'_m	a'_{m1}	0	$a'_{m,n-m}$	0	0	1
$\sigma_j \rightarrow$			σ'_1	0	σ'_{n-m}	0	σ'_{n-m+l}	0

新的基解为 $X^1 = (0, \cdots, \theta, \cdots, 0, b_1 - \theta a_{1k}, \cdots, b_m - \theta a_{mk})^{\mathrm{T}}$，

$$z^1 = \theta \cdot c_k = \theta \cdot \sigma_k = \frac{b_l}{a_{lk}} . \sigma_k = b_l \cdot \alpha < 0 < z^0$$

目标函数改变量 $\Delta z = z^1 - z^0 = b_l \cdot \alpha < 0$。检验数 $\sigma'_j \leq 0$，$j = 1, \cdots, n$，其中 $\sigma'_{n-m+l} = -\frac{c_k}{a_{lk}}$。对偶问题仍可行，对偶变量 $Y = (0, \cdots, \sigma'_{n-m+l}, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，目标函数值

$$w^1 = b^{\mathrm{T}} Y = Y^{\mathrm{T}} b = \frac{c_k}{a_{lk}} \cdot b_l = b_l \cdot \alpha = z^1$$

由以上分析可以得到如下结论：

定理 1　对偶单纯形法迭代保持原问题与对偶问题的目标函数值相等。

定理 2　单纯形法迭代保持原问题与对偶问题的目标函数值相等。

定理 2 可通过类似的分析得到。

定理 3　使用对偶单纯形法求解线性规划时，每次迭代使原问题的目标函数值减少 $|\Delta z| = |b_l| \cdot \alpha$，同时使对偶问题的目标函数减少同样值．当原问题得到最优解时，对偶问题也得到最优解。

由定理 3 可知，为尽快找到原问题的最优值，

只需尽快找到对偶问题的最优解。而每次迭代对偶问题目标函数值减少$|\Delta z| = |b_l| \cdot \alpha$，因而，令

$$\min \Delta z = \min\left\{ b_i \cdot \min\left\{ \frac{\sigma_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0, \sigma_j < 0, b_i < 0 \right\}\right\} = b_l \frac{\sigma_k}{a_{lk}}$$

以 x_k 为换入变量，x_{n-m+l}为换出变量进行换基迭代，这样选取的主元素 a_{lk}称为最好主元素。

对偶单纯形改进算法步骤：①列出初始单纯形表，计算检验数；$\sigma_j \leq 0$；②如果所有的右端项 $b_1, b_2, \cdots, b_m \geq 0$，则得到问题的最优解，否则转下一步；③若 $b_i < 0$，但 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} \geq 0$，则原问题无可行解，否则转下一步；④计算

$$\min \Delta z = \min\left\{ b_i \cdot \min\left\{ \frac{\sigma_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0, \sigma_j < 0, b_i < 0 \right\}\right\}$$

$$l_0 = \min\left\{ l \,\middle|\, b_l \frac{\sigma_j}{a_{lj}} = \min \{\Delta z\} \right\},$$

$$k_0 = \min\left\{ k \,\middle|\, b_l \frac{\sigma_j}{a_{lj}} = \min \{\Delta z\} \right\};$$

⑤以 x_{k_0}为换入变量，x_{n-m+l_0}为换出变量，作换基迭代，再转②。

步骤④考虑了 Bland 规则[4]，以避免循环。

3 算 例

例 求解线性规划问题

$$\max z = -20x_1 - 30x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 1 使用对偶单纯形法。列出初始单纯形表，见表 5。

表 5 例子的初始单纯形表

Table 5 The primary simplex table of the example

	$c_j \rightarrow$		-20	-30	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-4	-1	-1	1	0	0
0	x_4	-8	-4	-5	0	1	0
0	x_5	-7	-2	-2	0	0	1
	$\sigma_j \rightarrow$		-20	-30	0	0	0

从表 5 知，$\min\{-4, -8, -7\} = -8$，因而选取 x_4 为换出变量，$\alpha = \min\left\{\frac{-20}{-4}, \frac{-30}{-5}\right\} = \frac{-20}{-4} = 5$，因而选取 x_1 为换入变量，迭代得表 6。

从表 6 知，$\min\{-2, -3\} = -3$，因而选取 x_5 为换出变量，x_4 为换入变量，迭代得到表 7。

表 6 表 5 的迭代表 (用 x_1 替换 x_4 作为基变量)

Table 6 The iterative table of table 5 (use x_1 as basic variable replacing x_4)

	$c_j \rightarrow$		-20	-30	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-2	0	1/4	1	-1/4	0
-20	x_1	2	1	5/4	0	-1/4	0
0	x_5	-3	0	1/2	0	-1/2	1
	$\sigma_j \rightarrow$		0	-5	0	-5	0

表 7 表 6 的迭代表 (用 x_4 替换 x_5 作为基变量)

Table 7 The iterative table of table 6 (use x_4 as basic variable replacing x_5)

	$c_j \rightarrow$		-20	-30	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-1/2	0	0	1	0	-1/2
-20	x_1	7/2	1	1	0	0	-1/2
0	x_4	6	0	-1	0	1	-2
	$\sigma_j \rightarrow$		0	-10	0	0	-10

再选取 x_3 为换出变量，x_5 为换入变量，迭代得到最终单纯形表 (表 8)。

最优解 $X^* = (4, 0, 0, 8, 1)^T$，最优值 $z^* = -80$。这里 x_4，x_5 均被换出又换入。

解 2 使用对偶单纯形改进算法。从表 5 知

$$-4\min\left\{\frac{-20}{-1}, \frac{-30}{-1}\right\} = -80,$$

$$-8\min\left\{\frac{-20}{-4}, \frac{-30}{-5}\right\} = -40,$$

$$\min\left\{\frac{-20}{-2}, \frac{-30}{-2}\right\} = -70,$$

$$\min\{-80, -70, -40\} = -80$$

因而 $a_{11} = -1$ 为最好主元素，x_3 为换出变量，x_1 为换入变量，即得到最终单纯形表。

表 8 例子的最终单纯形表

Table 8 The final simplex table of the example

	$c_j \rightarrow$		-20	-30	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_5	1	0	0	-2	0	1
-20	x_1	4	1	1	-1	0	0
0	x_4	8	0	-1	-4	1	0
	$\sigma_j \rightarrow$		0	-10	-20	0	0

参考文献：

[1] 高国成，王卓鹏，孟艳双. 关于使用最大改进规则的单纯形算法 [J]. 运筹与管理，2004，13 (2)，5-7.

[2] 兰艳，李学勇. 一种改进的单纯形法 [J]. 长沙大学学报 (自然科学版)，1998，12 (4)：29-32.

[3] 胡运权，郭耀煌. 运筹学教程 [M]. 北京：清华大学出版社，1998. 47-48.

[4] Bland G G. New Finite Pivoting Rules of the Simplex Method [J]. Math Oper Res，1997，103-107.