

文章编号: 1005—8893 (2006) 04—0050—03

# 扰动的广义 Emden—Fowler 差分方程解的性质

吴春青

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213164)

摘要: 利用不动点定理, 得到了广义 Emden—Fowler 差分方程在扰动下的有界解和无界解, 并分析了这些解的振动性和渐近性质。

关键词: 差分方程; 振动和非振动; 渐近性质; 不动点定理

中图分类号: O 241. 3

文献标识码: A

## Properties of Solutions for Disturbed Emden—Fowler Difference Equations

WU Chun—qing

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** The existence of bounded and unbounded solutions for disturbed Emden—Fowler difference equations is studied, oscillation and approximation of those solutions are also obtained.

**Key words:** difference equation; oscillation and nonoscillation; asymptotic behavior; fixed point theorem

广义的 Emden—Fowler 微分方程<sup>[1]</sup>为

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x^\gamma(t) = 0 \quad (1)$$

这里  $p(t)$ ,  $q(t)$  是非负连续函数,  $\gamma$  是一个正的常数。从 20 世纪 70 年代至今, 由于 Emden—Fowler 微分方程在物理学、气体动力学和流体力学等方面的广泛应用, 这类方程解的性质研究也被深入展开。藉由计算机技术的发展, 一些研究者对它的差分形式, 即是

$$\Delta(c_n(\Delta x_n)) + a_n x_{n+1}^\gamma = 0 \quad (2)$$

的解的性质也做了相应的研究。在方程 (2) 中,  $c_n$ ,  $a_n$  是非负的实数序列,  $\gamma$  也是一个正的常数。符号  $\Delta$  是前向差分算子, 即是  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ 。

对于方程 (2) 在  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} = \infty$  或  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} < \infty$  情况下解的有界性、振动性和渐近性质可参考文献 [2~5]

及其所引文献。

方程 (1) 经适当变形<sup>[6]</sup>可化为

$$x''(t) + s(t)x^\gamma(t) = 0 \quad (3)$$

这个方程的离散形式为

$$\Delta^2 x_n + s_n x_{n+1}^\gamma = 0 \quad (4)$$

在文献 [6] 中, 作者研究了方程 (4) 在扰动下解的有界性、无界性和渐近性质。要说明的是, 方程 (1) 可化为 (3) 式, 但在离散情况下, 方程 (2) 一般不能化为 (4) 式。因此对方程 (4) 在扰动下解的性质的研究也有其意义。如文献 [7] 研究了方程 (2) 在扰动形式  $\Delta(c_n(\Delta x_n)) + (a_n + f_n)x_{n+1} = 0$  下的解的性质。下面讨论方程 (2) 在扰动形式:

$$\Delta(c_n(\Delta x_n)) + a_n x_{n+1}^\gamma = f_n \quad (5)$$

下解的有界性、无界性和渐近性质。主要思想是将

\* 收稿日期: 2006—04—29

作者简介: 吴春青 (1972—), 男, 安徽歙县人, 硕士, 主要研究方向为差分方程的性质。

方程 (5) 看作

$$\Delta (C_n (\Delta x_n)) = 0 \quad (6)$$

的扰动, 利用不动点定理得到相关结果. 在  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_i} = \infty$  时, 方程 (6) 的主解和非主解<sup>[9]</sup> 分别为  $x_n = \alpha$ ,  $y_n = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{C_i}$ . 这里  $\alpha$  为某常数.

## 1 主要结果

在这部分, 将会通过两个定理来说明方程 (5) 的有界解, 无界解存在性和这类解的渐近性质.

定理 1 假如  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_i} = \infty$ ,  $f_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$  且

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n C_{n+1}^{\gamma+1} < \infty \quad (7)$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{F_n}{C_n} < \infty \quad (8)$$

这里  $C_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{C_j}$ ,  $F_n = \sum_{j=n}^{\infty} f_j$ , 则方程 (5) 存在一个无界的非振动的解, 并且这个解具有渐近性质

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{C_n} = c \quad (9)$$

$c$  为某个正的常数.

证明: 构造下列映射  $T$ :

$$(Tz)_n = \alpha + \beta C_n + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_k}{C_k} + C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k z_{k+1}^{\gamma} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k a_{k-1} z_k^{\gamma}, \quad n \geq N \quad (10)$$

这里  $N$  是一个自然数, 后面将给出它的取值.  $\alpha$ ,  $\beta$  是初值决定的常数 (也可以认为  $\alpha$ ,  $\beta$  是任意常数). 在定理 1 的假定之下, 当  $n \geq N$  时映射  $T$  是良定义的. 直接计算可知,  $\{z_n\}_{n \geq N}$  是方程 (5) 的解当且仅当  $\{z_n\}_{n \geq N}$  是映射  $T$  的不动点. 这是因为, 若  $u_n$ ,  $n \geq N$  为 (10) 式的不动点, 则  $u_n = \alpha + \beta C_n + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_k}{C_k} + C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k u_{k+1}^{\gamma} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k a_{k-1} u_k^{\gamma}$ ,  $n \geq N$ , 于是  $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = -\frac{\beta}{C_n} - \frac{F_n}{C_n} - \frac{1}{C_n} \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k u_{k+1}^{\gamma}$ ,  $c_n \Delta u_n = -\beta - F_n - \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k u_{k+1}^{\gamma}$ ,  $\Delta (c_n \Delta u_n) = F_n - F_{n+1} - \sum_{k=N-1}^n a_k u_{k+1}^{\gamma} + \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k u_{k+1}^{\gamma} = f_n - a_n u_{n+1}^{\gamma}$ , 即是  $\Delta (C_n (\Delta u_n)) + a_n u_{n+1}^{\gamma} = f_n$ , 也就是说  $u_n$ ,  $n \geq N$  为 (5) 式的解. 反之也正确.

为方便, 首先在 (10) 式中取  $\alpha=0$ ,  $\beta=1/2$ , 即

$$(Tz)_n = \frac{C_n}{2} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_k}{C_k} + C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k z_{k+1}^{\gamma} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k a_{k-1} z_k^{\gamma}, \quad n \geq N \quad (11)$$

下面将会证明映射 (11) 的不动点是存在的. 然后对一般的  $\alpha$ ,  $\beta$  说明不动点存在性.

定义一个实数序列的 Banach 空间  $B$ , 范数由下式确定:

$$\|y\| = \sup_{n \geq N} \left\{ \frac{y_n}{C_n} \right\} \quad (12)$$

在  $B$  中取闭子集  $S = \{y_n \mid 1/2 \leq y_n / C_n \leq 1, n \geq N\}$ . 如果  $\{z_n\} \in S$ , 则  $\frac{(Tz)_n}{C_n} \geq \frac{1}{2}$ . 注意到 (7) 式, (8) 式和  $S$  的定义, 如果能选择  $N_1$ , 当  $n \geq N_1$  时,

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_k}{C_k} + C_n \sum_{k=N_1-1}^{n-1} a_k z_{k+1}^{\gamma} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k a_{k-1} z_k^{\gamma} \right| < \frac{1}{2} C_n$$

因此有  $\frac{(Tz)_n}{C_n} < 1$ . 于是  $TS \subset S$ ,  $n \geq N_1$ .

如果  $\{z_n^{(1)}\} \in S$ ,  $\{z_n^{(2)}\} \in S$ , 那么

$$\begin{aligned} & |(Tz)_n^{(1)} - (Tz)_n^{(2)}| = \\ & C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k |z_{k+1}^{(1)\gamma} - z_{k+1}^{(2)\gamma}| + \\ & \sum_{k=n}^{\infty} C_n a_{k-1} |z_k^{(1)\gamma} - z_k^{(2)\gamma}| = \\ & C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k C_{k+1}^{\gamma} \left| \left( \frac{z_{k+1}^{(1)}}{C_{k+1}} \right)^{\gamma} - \left( \frac{z_{k+1}^{(2)}}{C_{k+1}} \right)^{\gamma} \right| + \\ & \sum_{k=n}^{\infty} C_n a_{k-1} C_k^{\gamma} \left| \left( \frac{z_k^{(1)}}{C_k} \right)^{\gamma} - \left( \frac{z_k^{(2)}}{C_k} \right)^{\gamma} \right| \leq \\ & C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k C_{k+1}^{\gamma} M \|z^{(1)} - z^{(2)}\| + \\ & \sum_{k=n}^{\infty} C_k a_{k-1} C_k^{\gamma} M \|z^{(1)} - z^{(2)}\| \end{aligned}$$

$M$  是能通过拉格朗日中值定理得到的一个正的常数. 再一次注意到 (7) 式, 选择  $N_2$ , 使得

$$|(Tz)_n^{(1)} - (Tz)_n^{(2)}| \leq \frac{1}{4} \|z^{(1)} - z^{(2)}\|, \quad n \geq N_2$$

相应地有:

$$\|Tz^{(1)} - Tz^{(2)}\| \leq \frac{1}{4} \|z^{(1)} - z^{(2)}\|, \quad n \geq N_2$$

因此如果选择  $N = \max \{N_1, N_2\}$ , 那么  $T$  是  $S$  上的压缩映射 ( $n \geq N$  时). 因此在  $S$  上存在有映射 (11) 的不动点. 注意  $S$  的定义和  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C_k} = \infty$ , 这个不动点即方程 (5) 的解是非振动的而且是无界的.

一般地, 如果在映射 (10) 中设  $\alpha=0$ ,  $\beta=c > 0$ ,  $c$  为定理 1 中的正的常数, 且定义一个子集  $S' = \{y_n \mid c - \epsilon \leq y_n / C_n < c\}$ ,  $\epsilon$  是任意给定的一

个正数, 只要  $c - \epsilon > 0$ . 仿照上面的证明, 渐近性质  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / C_n = c$  能类似得到.

定理 2 假如  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} = \infty$ ,  $f_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$  且  $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_k}{c_k} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , 则方程 (5) 存在一个有界, 非振动的解  $x_n$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c_1$ ,  $c_1 > 0$  是一个常数.

证明: 在映射 (10) 中, 设  $\alpha = c_1$ ,  $\beta = 0$ , 即是

$$(Tz)_n = c_1 + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_k}{c_k} + C_n \sum_{k=N-1}^{n-1} a_k z_{k+1}^{\gamma} + \sum_{k=n}^{\infty} C_k a_{k-1} z_k^{\gamma}, \quad n \geq N \quad (13)$$

同样再定义一个实数序列  $\{y_n\}$  的 Banach 空间, 范数为  $\|y\| = \sup_{n \geq N} \{y_n\}$ . 取一个闭子集  $S = \{y_n | c_1 - \epsilon \leq y_n \leq c_1\}$ . 剩下的证明与定理 1 类似.

## 2 推论及注

在上文中, 结果均在假设  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} = \infty$  之下. 如果  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} < \infty$ , 有:

推论 1 假如  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} < \infty$ , 而且定理 2 的其余假定均满足, 则存在方程 (5) 的一个有界非振动的解  $x_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ ,  $c > 0$ , 是一个常数.

推论 2 假如  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} < \infty$ ,  $\gamma > 1$ , 定理 1 的其余假定均满足, 则存在方程 (5) 的一个无界非振动解  $x_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{C_n} = c$ ,  $c > 0$  是一个常数.

注记: 当  $0 < \gamma < 1$  且  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c_i} < \infty$  时, 方程 (5) 的

具有渐近性质  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{C_n} = c$  的非振动解的存在性的证明不同于定理 1. 在这种情况下, 方程 (5) 的系数的假定和定理 1 将不同.

## 参考文献:

- [1] Wong J S W. On the Generalized Emden—Fowler Equation [J]. SIAM Review, 1975, 17 (2): 339—360.
- [2] Zhang B G. Oscillation and Asymptotic Behavior of Second Order Difference Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1993, 173 (1): 58—68.
- [3] Hooker J W, Patula W T. A Second Order Nonlinear Difference Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983, 91 (1): 9—29.
- [4] Chen Shaozhu, Wu Chunqing. Riccati Techniques and Approximation for a Second Order Poincaré Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, 222 (1): 177—191.
- [5] Patula W T. Growth and Oscillation Properties of Second Order Difference Equations [J]. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1979, 10 (6): 1272—1279.
- [6] 吴春青. 一类非线性差分方程解的性质 [J]. 江苏工业学院学报, 2005, 17 (2): 47—49.
- [7] Chen Shaozhu. A Problem of Hartman and Wintner: Approximation for Disturbed Perturbations [J]. An International Journal of Computer and Mathematics with Application, 2001, 42 (3): 655—669.