

文章编号: 1673 - 9620 (2007) 01 - 0033 - 04

含单负或双负介质光子晶体的传输矩阵和色散关系*

唐 丽, 陈宪锋, 沈小明, 是度芳

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213164)

摘要: 基于 Maxwell 的电磁场理论, 推导了平面电磁波在 $\epsilon > 0, \mu < 0$ 或 $\epsilon < 0, \mu > 0$ 的介质 (简称单负介质, SNG), 或 ϵ, μ 同时为负的介质 (简称双负介质, DNG) 中传播的传输矩阵。对于不同的偏振态, 采用不同的修正导纳, 则传输矩阵具有相同的形式。对于 SNG 或 DNG 构成的光子晶体, 利用周期性条件, 进而得到了一维无限周期光子晶体的色散关系。

关键词: 单负介质; 双负介质; 传输矩阵; 色散关系

中图分类号: O 431. 2 **文献标识码:** A

Transfer Matrix and Dispersion Relation of 1D photonic Crystal Composed of Single negative or Double negative Materials

TANG Li, CHEN Xian - feng, SHEN Xiao - ming, SHI Du - fang

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Based on Maxwell's electromagnetic field theory, the transfer matrix of propagating planar electromagnetic wave is deduced in medium with $\epsilon > 0$ and $\mu < 0$ or $\epsilon < 0$ and $\mu > 0$ (SNG, called single negative medium), or in medium with simultaneously negative ϵ, μ (DNG, called double negative medium). The transfer matrix can be expressed in the same formula for different polarization by using different modified conductance. By using periodical condition the dispersion relation is obtained for 1D infinitely periodical photonic crystal composed of SNG or DNG.

Key words: single negative medium; double negative medium; transfer matrix; dispersion relation

光子晶体是由介电常数 (或折射率) 周期性变化排布的材料, 具有光子禁带和光子局域特征, 因此在许多方面都有重要应用。一般的介质材料, 其介电常数 ϵ 、磁导率 μ 均为正值, 因此折射率 $n > 0$, 这类材料称为双正介质 (DPS), 或称为右手材料。对 DPS 构成的光子晶体的研究比较充分, 理论也较为完善。传输矩阵法就是其中的一种方法, 它是研究光波在一维光子晶体中传播的一种行之有效的方^[1-3]。

2000 年 Smith 等人制造成功一种人造物质,

在某些频段可以体现出 $\epsilon < 0, \mu < 0$ 的特性^[4]。这种人造物质称为双负介质 (DNG), 或称为负折射率材料、左手材料。DNG 的出现, 拓宽了光子晶体的应用领域, 引发了新一轮的研究热潮。对于 DNG, 将一般传输矩阵中相应介质层的折射率用负值代入, 通过简单的替代就得到了适用于 DNG 的传输矩阵^[5]。但是这种人造物质在自然界中并不存在。相反, 自然界中存在着一些频段内 ϵ 或 μ 的实部为负的材料 (单负介质, SNG)。如: 等离子体, 当入射电磁波的频率低于其等离子体振荡频率

* 收稿日期: 2006 - 03 - 28

作者简介: 唐丽 (1963 -), 女, 四川乐山人, 讲师。

时, 将出现 $\epsilon < 0$ 但 $\mu > 0$ 的特性; 细金属条, 当电矢量方向沿着轴向时金属条将出现高通滤波的性质, 即出现 $\epsilon < 0$ 的特性; 开口谐振环, 当磁矢量方向沿着环的轴向取向时将在环内产生磁共振, 出现 $\mu < 0$ 的特性^[4,6]。Smith 等人就是将开口谐振环和细金属条阵列周期性排列而制成了在整体结构上体现负折射率性质的人造物质。实际上这种人造物质可以看成是由两种 SNG 材料周期性排列而成的光子晶体。对于这种 SNG 材料的研究, 报道不多, 也没有看到过有关传输矩阵方法的报道。

基于这一思想, 本文从 Maxwell 的电磁场理论出发, 结合边界连续性条件, 推导了电磁波在一维光子晶体中传播的传输矩阵和色散关系。该方法适用于更一般的光子晶体, 即光子晶体可由 DPS、或 DNG、SNG 所组成。并利用该方法研究了 SNG 光子晶体的传输特性和色散关系, 得到了预期的结果。

1 理论推导

1.1 传输矩阵

电磁波在无源介质中传播时的 Maxwell 方程为 $\nabla \cdot D = 0, \nabla \cdot B = 0, \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$ 。此外, $D = \epsilon E, B = \mu H$ 。

一维光子晶体有 N 层, 每层介质的有关参数为: 介电常数 ϵ_j 、磁导率 μ_j 、层厚 $d_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 。该晶体共有 $N + 1$ 个界面, 依次标记为界面 1, 2, ..., $N + 1$ 。晶体外侧为无限大的均匀介质, 相应参数为 ϵ_0, μ_0 和 ϵ_s, μ_s 。当电磁波入射时, 以入射面为 xz 平面, z 轴为晶体的法线方向, xy 平面平行于晶体表面, 如图 1。

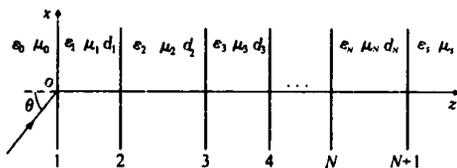


图 1 一维光子晶体的结构示意图

Fig 1 Schematic diagram of 1D photonic crystal

考虑介质为各向同性介质, 时谐因子为 $e^{-i\omega t}$ 。平面电磁波有两种偏振态: 横电波 (TE, 也称 s 波) 和横磁波 (TM, 也称 p 波)。

先讨论 TE 波, 均匀无限大介质中 Maxwell 方程的解为

$$E = yE_y e^{-i\omega t}, E_y = E_0 e^{ik_x x + ik_z z} \tag{1}$$

$$H = x \left[-\frac{k_z}{\mu} \right] E_y e^{-i\omega t} + z \left[\frac{k_x}{\mu} \right] E_y e^{-i\omega t} \tag{2}$$

式中, x, y, z 表示 x, y, z 轴的单位矢量, $k_x^2 + k_z^2 = \epsilon \mu$ 。由于光子晶体一般置于正常介质 DPS 中, $k_x = n \sin \theta, c$ 为光速, n 为外侧介质的折射率, θ 为入射角。

由于界面的反射和折射, 故在介质中一般同时存在着前向波和反向波, 介质中的电场和磁场应为这两种波的叠加, 即

$$E_y = e^{ik_x x} (A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}) \tag{3}$$

$$H_x = -\frac{k_z}{\mu} e^{ik_x x} (A e^{ik_z z} - B e^{-ik_z z}) \tag{4}$$

$$H_z = \frac{k_x}{\mu} e^{ik_x x} (A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}) \tag{5}$$

表达式中的系数 A, B 将由边界处电磁场的连续性条件决定。以界面 2 ($z = d_1$) 为例, 边界连续性条件为

$$E_{y1}(z = d_1^-) = E_{y2}(z = d_1^+) \tag{6}$$

$$H_{x1}(z = d_1^-) = H_{x2}(z = d_1^+) \tag{7}$$

式中下标数字表示相应的介质层。

在界面 1 上, 有

$$E_{y1}(z = 0^+) = e^{ik_x x} (A_1 + B_1) = E_1 \tag{8}$$

$$H_{x1}(z = 0^+) = -\frac{k_{z1}}{\mu_1} e^{ik_x x} (A_1 - B_1) = -H_1 \tag{9}$$

在界面 2 上, 有

$$E_{y1}(z = d_1^-) = e^{ik_x x} (A_1 e^{ik_{z1} d_1} + B_1 e^{-ik_{z1} d_1}) = E_2 \tag{10}$$

$$H_{x1}(z = d_1^-) = -\frac{k_{z1}}{\mu_1} e^{ik_x x} (A_1 e^{ik_{z1} d_1} - B_1 e^{-ik_{z1} d_1}) = -H_2 \tag{11}$$

上式中定义的 E_1, H_1 和 E_2, H_2 分别代表在介质 1 两边的界面 1、2 上切向的电场强度和磁场强度。在其他介质中也可以写出相应的表达式, 根据边界连续性条件易得, 在不同的介质中 k_x 的数值不变, 而 k_{zj} 分量却具有不同的值, $k_x^2 + k_{zj}^2 = \epsilon_j \mu_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 。

若记 $\tilde{\mu}_j = \frac{k_{zj}}{\mu_j}$ 为介质 j 的修正导纳, 则由式

(8) ~ (11) 可得

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_{z1} d_1 & -\frac{i}{\tilde{\mu}_1} \sin k_{z1} d_1 \\ -i \tilde{\mu}_1 \sin k_{z1} d_1 & \cos k_{z1} d_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ H_2 \end{pmatrix} =$$

$$M_1 \begin{pmatrix} E_2 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

矩阵 M_1 称为介质 1 的传输矩阵, 对其它介质层的处理亦有相似的形式。

对于 TM 波, 亦可以进行类似的处理, 传输矩阵形式相似, 不过介质 j 层中的修正导纳为 $Y_j = \frac{-i}{k_{zj}}$ 。

综上所述, 得到了联系介质 j 层两侧两界面上切向的电场强度和磁场强度之间的传输矩阵

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos k_{zj} d_j & -\frac{i}{j} \sin k_{zj} d_j \\ -i j \sin k_{zj} d_j & \cos k_{zj} d_j \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中修正导纳为

$$j = \begin{cases} \frac{k_{zj}}{\mu_j} & (\text{TE}) \\ -\frac{i}{k_{zj}} & (\text{TM}) \end{cases} \quad (14)$$

而 k_{zj} 的表达式为

$$k_{zj} = \begin{cases} \sqrt{{}^2 j \mu_j - k_x^2} & (\text{DPS, 且 } {}^2 j \mu_j > k_x^2) \\ -\sqrt{{}^2 j \mu_j - k_x^2} & (\text{DNG, 且 } {}^2 j \mu_j > k_x^2) \\ i \sqrt{k_x^2 - {}^2 j \mu_j} & (\text{上述两种情况除外}) \end{cases} \quad (15)$$

对于 k_{zj} 的表达式, 第一种情况 (DPS) 的研究较多, 已被人们广泛接受; 对于第二种情况 (DNG), 是近期的研究热点, 由于在 DNG 中波矢方向与能流方向相反, 故 k_{zj} 取负号^[5]; 而对于第三种情况, 包括了 SNG, 以及前两种情况中当 ${}^2 j \mu_j < k_x^2$ 时倏逝波的传播。

1.2 反射和透射特性

已知单层介质的传输矩阵, 可以得到整个一维光子晶体的总传输矩阵为

$$M = M_1 M_2 \dots M_N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{pmatrix}$$

由此可得反射系数 r 和透射系数 t 为

$$r = \frac{a_0 + b_0 s - c - d_s}{a_0 + b_0 s + c + d_s} \quad (17)$$

$$t = \frac{2_0 m}{a_0 + b_0 s + c + d_s}, \quad m = \begin{cases} 1 & (\text{TE}) \\ \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta_s} & (\text{TM}) \end{cases} \quad (18)$$

式中 $0, s$ 为晶体外侧介质的修正导纳, 其形式满足 (14) 式。不过对于一般的正常介质 DPS, $j = n_j \cos \theta_j / z_0$ (TE) 或 $n_j / (z_0 \cos \theta_j)$ (TM) ($j = 0, s$), 真空阻抗 $z_0 = 377 \Omega$ 。 n_0, n_s 分别表示入射侧、出射侧介质的折射率, θ_0, θ_s 分别表示入射角和出射角。

同时可得光子晶体的反射率 R 和透射率 T 为

$$R = |r|^2 \quad (19)$$

$$T = \frac{4_0 s}{|a_0 + b_0 s + c + d_s|^2} \quad (20)$$

1.3 色散关系

若光子晶体由 A、B 两种介质周期性交替排列而成, 这两种介质的相关参数分别为 μ_1, d_1 和 μ_2, d_2 , 则 $d = d_1 + d_2$ 为光子晶体的晶格常数。利用周期性条件, 对 TE 波有

$$E_{y2}(z = d^-) = E_{y1}(z = 0^+) e^{iqd} \quad (21)$$

$$H_{x2}(z = d^-) = H_{x1}(z = 0^+) e^{iqd} \quad (22)$$

由此可以得到系数 A_1, B_1 和 A_2, B_2 之间的关系。要使这些系数有解, 则必须满足方程

$$\cos(qd) = \cos(k_{z1} d_1) \cos(k_{z2} d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \sin(k_{z1} d_1) \sin(k_{z2} d_2) \quad (23)$$

对 TM 波亦可得到相同的表达式。(23) 式即为色散关系式, 式中的修正导纳满足 (14) 式。(23) 式中, q 表示在晶体中传输波的波矢。若 q 为实数, 表示该频段的波能在晶体中传播, 透射谱为通带; 若 q 为虚数, 表示该频段的波不能在晶体中传播, 透射谱出现截止带。

2 数值计算

利用文献 [7] 中的有关数据: $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1 - \frac{100}{2}, d_1 = 12 \text{ mm}, d_2 = 1 - \frac{100}{2}, \mu_2 = 3, d_2 = 6 \text{ mm}$ (圆频率 $\omega = 2\pi f$, 单位为 GHz), 外侧介质 $n_0 = n_s = 1$, 周期数 $N = 20$ 。电磁波垂直入射到光子晶体, 利用上述理论进行了透射特性的研究。

图 2 绘出了该光子晶体的透射谱和色散关系, 其中 (a) 为色散曲线, (b) 为透射谱。当频率 $f < 1.592 \text{ GHz}$ 时, 光子晶体为 SNG 晶体; 而当 $f > 1.592 \text{ GHz}$ 时, 则为 DPS 晶体。由图 2 (a) 可知, 光子晶体的禁带范围为 (0, 0.2157)、(0.6079, 1.0012)、(3.4018, 6.3170) GHz, 而在 (0.2157, 0.6079)、(1.0012, 3.4018)、

(6.317 0, 8.496 7) GHz 段则为通带, 电磁波可以透过, 这从图 2 (b) 也可以清晰看出。

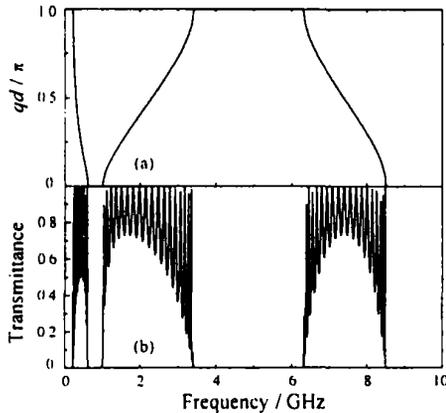


图 2 一维光子晶体的色散关系 (a) 和透射谱 (b)

Fig. 2 The dispersion curves (a) and transmission spectra (b) of 1D photonic crystal

从图中可以发现, 当频率 $f < 1.592$ GHz 时, 尽管光子晶体为 SNG 晶体, 某一频段的电磁波依然能够透过, 甚至还会出现全透。我们知道, 若晶体只有一层 SNG, 电磁波在该层介质内的传输是倏逝波, 不可能出现全透, 仅出现微弱的透穿效应。但多层 SNG 构成的光子晶体, 则会出现不同倏逝波的强烈耦合, 从而使得某一频率的电磁波出现了很强的透穿。

3 结 论

基于 Maxwell 的电磁场理论, 推导了平面电

磁波在一维光子晶体中传播的传输矩阵。对于不同偏振的电磁波, 采用不同的修正导纳, 则传输矩阵具有相同的形式。该传输矩阵具有普适性, 可以适用于任意类型的介质所构成的光子晶体。此外利用周期性条件, 还得到了一维无限周期光子晶体的色散关系。

参考文献:

- [1] Wang H, Li Y. An eigen matrix method for obtaining the band structure of photonic crystals [J]. Acta Phys Sin, 2001, 50 (11): 2 172 - 2 178.
- [2] Chen X, Shen X, Jiang M, et al. Studies on the defect mode properties of 1D photonic crystal [J]. Acta Photonica Sinica, 2005, 34 (12): 1 876 - 1 880.
- [3] 蒋美萍, 江兴方, 沈小明, 等. 一维光子晶体的偏振特性研究 [J]. 量子电子学报, 2005, 22 (4): 612 - 616.
- [4] Smith D R, Padilla W J, Vier D C, et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity [J]. Phys Rev Lett, 2000, 84 (18): 4 184 - 4 188.
- [5] 杨立功, 黄弼勤, 叶辉, 等. 负折射率介质中光波的相位和传输特性研究 [J]. 光学学报, 2004, 24 (3): 388 - 392.
- [6] Panoiu N C, Osgood R M. Influence of the dispersive properties of metals on the transmission characteristics of left - hand materials [J]. Phys Rev E, 2003, 68 (1): 016611.
- [7] Jiang H, Chen H, Li H, et al. Properties of one - dimensional photonic crystals containing single - negative materials [J]. Phys Rev E, 2004, 69 (6): 066607.