

文章编号: 1673—9620 (2007) 02—0054—04

带扩散的基于比率的捕食模型的分析^{*}

刘 佳

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213164)

摘要: 建立了带扩散的基于比率的捕食模型, 讨论了模型的一致持久性, 应用特征子空间分解与线性化的方法得到了模型正平衡点局部稳定性的充分条件, 进一步通过构造适当的 Lyapunov 泛函的方法得到了正平衡点全局稳定性的充分条件。

关键词: 全局稳定; 捕食模型; 持久性; 基于比率

中图分类号: O 175. 26

文献标识码: A

Analysis of a Ratio—Dependent Predator—Prey Model with Diffusion

LIU Jia

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China)

Abstract: In this paper, a ratio—dependent predator—prey system with diffusion subject to the homogeneous Neumann boundary condition is studied. Uniform persistence under some appropriate conditions of the system is showed. The sufficient condition of local asymptotic stability of the positive equilibria of the system is obtained by using the characteristic decomposition and linearization method. Moreover, the global asymptotic stability of the positive equilibria is established by constructing a suitable Lyapunov function.

Key words: global stability; predator—prey model; persistence; ratio—dependent

近年来, 以 Volterra 和 Lotka 为代表的种群动力学已经有了相当的发展, 特别是基于比率的捕食者—食饵系统的研究已有大量工作^[1~4]。对 Holling—Tanner 系统的研究也有了很好的结果^[5]。在文献 [6] 中考虑了基于比率的 Holling—Tanner 型常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{k} \right) - \frac{mu v}{Av + u} \\ \frac{dv}{dt} = v \left[s \left(1 - \frac{hv}{u} \right) \right] \end{cases}$$

讨论了上述系统的正平衡解的全局稳定性。然而许多的生态过程都与物种的空间分布有关, 仅考虑种群密度与时间的关系是不合理的, 因此考虑下列的

带扩散的基于比率的 Holling—Tanner 型偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = ru \left(1 - \frac{u}{k} \right) - \frac{mu v}{Av + u}, & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = v \left[s \left(1 - \frac{hv}{u} \right) \right], & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u(x, t)$, $v(x, t)$ 分别表示种群中的食饵、捕食者在时刻的空间分布密度, d_1 , d_2 分别表示它们的空间扩散率。假设食饵的增长符合 Logistic 增长方程并且整个系统对食饵的最大承受能

^{*} 收稿日期: 2006—09—28

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金项目资助 (05KJB110154)

作者简介: 刘佳 (1981—), 女, 江苏常州人, 硕士, 研究方向: 偏微分方程。

力是 k , 它的净增长率是 r . 系统中的响应函数为 $mu/(Av+u)$, m 是捕获率, A 是半饱和常数. 捕食者的增长也符合 Logistic 增长方程并且整个系统对捕食者的最大承受能力与食饵密度成比率, 它的净增长率是 s . 系统中的 hv/u 是著名的 Leslie-Grower 项^[7]. Ω 是 R^n 中的有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 光滑, η 表示区域边界的外法向量, $\partial_\eta u = \partial_\eta v = 0$ 是齐次 Neumann 边界条件, 表示环境封闭, 物种在边界附近没有移进或移出. 问题 (1) 中出现的所有参数都是正常数.

令 $t = t'/r$, $u = ku'$, $v = rkv'/m$, $d_1 = rd'_1$, 记 $Ar/m = a$, $s = \gamma$, $hr/m = \theta$, 则 (1) 式可化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = u(1-u) - \frac{uv}{av+u}, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \gamma v \left[1 - \frac{\theta v}{u} \right], & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

问题 (2) 的初值条件为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0, \\ v(x, 0) &= v_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

本文的主要目的是研究问题 (2) 正平衡点的渐近稳定性.

1 解的一致持久性

显然系统 (2) 存在唯一的正常数解 $\left(\frac{a+\theta-1}{\theta(a+\theta)}, \frac{a+\theta-1}{a+\theta} \right)$ 当且仅当 $a+\theta > 1$, 并且把这个正常数解记为 $E^*(u^*, v^*)$.

定理 1: 设 $u(x, t)$, $v(x, t)$ 是问题 (2) 在初值条件 (3) 下的任意一个正解. 令 $0 < \epsilon \ll 1$, $a > 1$, 则存在 $t_0 \gg 1$ 使

$$K - \epsilon < u(x, t) < 1 + \epsilon,$$

$$\frac{K - \epsilon}{\theta} < v(x, t) < \frac{1 + \epsilon}{\theta}$$

对任意 $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq t_0$ 都成立, 这里

$$K = (a-1)/a.$$

证明: 由问题 (2) 的第一个方程得到存在 $t_0 \gg 1$ 使 $u(x, t) < 1 + \epsilon$, $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq t_0$. 由抛物方程的比较原理, $v(x, t)$ 是下面这个方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - d_2 \Delta z = \gamma z \left[1 - \frac{\theta z}{1+\epsilon} \right], & x \in \Omega, \quad t > t_0 \\ \partial_\eta z = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > t_0 \\ z(x, t_0) = v(x, t_0) > 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

的下解. 让 $v(t)$ 是下面这个问题

$$\begin{cases} \omega_t = \gamma \omega \left[1 - \frac{\theta \omega}{1+\epsilon} \right], & t > t_0 \\ \omega(t_0) = \max_{\bar{\Omega}} v(x, t_0) > 0 \end{cases}$$

的唯一正解. 则 $v(t)$ 是问题 (4) 的上解. 因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = (1+\epsilon)/\theta$, 让 $t_1 > t_0$, 则 $v(x, t) < v(t) + \epsilon < (1+\epsilon)/\theta$, $x \in \bar{\Omega}$, $t > t_1$. 由 (2) 式的第一个方程可以得到 $u(x, t)$ 是下面这个方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - d_1 \Delta z = z \left[1 - z - \frac{1}{a} \right], & x \in \Omega, \quad t > t_1 \\ \partial_\eta z = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > t_1 \\ z(x, t_1) = u(x, t_1) > 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (5)$$

的上解. 让 $u(t)$ 是下面这个问题

$$\begin{cases} \omega_t = \omega(1 - \omega - 1/a), & t > t_1 \\ \omega(t_1) = \min_{\bar{\Omega}} u(x, t_1) > 0 \end{cases}$$

的正解, 则 $u(t)$ 是问题 (5) 的下解. 因为 $a > 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = (a-1)/a > 0$, 因此

$$u(x, t) > (a-1)/a - \epsilon \triangleq K - \epsilon. \text{ 类似地有 } v(x, t) > (K - \epsilon)/\theta - \epsilon.$$

在下面的讨论中假设 $a > 1$.

2 E^* 的稳定性

2.1 E^* 的局部稳定性

下面用特征子空间的分解和线性化方法考虑问题 (2) 在 E^* 处的局部稳定性. 设 $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ 是带有齐次 Neumann 边界条件的 $-\Delta$ 算子在 Ω 中的特征值, 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 中 μ_i 对应的特征子空间为 $E(\mu_i)$. 设 $X = \{u = (u, v) \in [C^1(\bar{\Omega})]^2 \mid \partial_\eta u = 0, x \in \partial\Omega\}$, $\{\phi_{ij}, j=1, \dots, \dim E(\mu_i)\}$ 是 $E(\mu_i)$ 的一组标准正交基, $X_{ij} = \{c\phi_{ij} \mid c \in R^2\}$, 则 $X_i = \bigoplus_{j=1}^{\dim E(\mu_i)} X_{ij}$. 设 $u = (u, v)$ 是问题 (2) 的常数稳态解, 下面进行线性化: 令 $u(x, t) = u + V(x, t)$ 代入方程 (2) 可得 $V_t = LV$, 其中 $L =$

$$\begin{pmatrix} d_1 \Delta + 1 - 2u - \frac{av^2}{(av+u)^2} & -\frac{u^2}{(av+u)^2} \\ \gamma \theta \frac{v^2}{u^2} & d_2 \Delta + \gamma \left[1 - 2\theta \frac{v}{u} \right] \end{pmatrix},$$

对每个 $i \geq 0$, λ 是算子 L 在不变子空间 X_i 上的特征值 $\Leftrightarrow \lambda$ 是矩阵

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 d_1 + 1 - 2u - \frac{av^2}{(av+u)^2} & -\frac{u^2}{(av+u)^2} \\ \gamma \theta \frac{v^2}{u^2} & -\mu_1 d_2 + \gamma \left(1 - 2\theta \frac{v}{u} \right) \end{pmatrix}$$

的特征值。在 E^* 处的特征方程为 $\varphi_i(\lambda) =$

$$\left[\lambda + d_1 \mu_i + u - \frac{\theta}{(a+\theta)^2} \right] \left[\lambda + d_2 \mu_i + \gamma \right] + \frac{\gamma \theta}{(a+\theta)^2}$$

当 $a > 1$, 对每个 $i \geq 0$, $\varphi_i(\lambda) = 0$ 的根 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ 都具有负实部。

下面证明存在正常数 $\bar{\delta}$ 满足 $\operatorname{Re}\{\lambda_{i1}\}, \operatorname{Re}\{\lambda_{i2}\} \leq -\bar{\delta} \quad \forall i \geq 0$ 。令 $\lambda = \mu_i \zeta$, 则 $\phi_i(\lambda) =$

$$\left[\mu_i \zeta + d_1 \mu_i + u - \frac{\theta}{(a+\theta)^2} \right] \left[\mu_i \zeta + d_2 \mu_i + \gamma \right] + \frac{\gamma \theta}{(a+\theta)^2} \triangleq \phi_i(\zeta)$$

由于 $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \infty$, 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_i(\zeta) / \mu_i^2 = (\zeta + d_1)(\zeta + d_2) \triangleq \phi(\zeta)$ 。容易看出 $\phi(\zeta) = 0$ 的根 ζ_1, ζ_2 都具有负实部。即存在正常数 $\bar{\delta}$ 满足 $\operatorname{Re}\{\zeta_1\}, \operatorname{Re}\{\zeta_2\} \leq -\bar{\delta}$ 。由连续性, 存在 i_0 , 使得 $\phi_i(\zeta) = 0$ 的根 ζ_{i1}, ζ_{i2} 满足 $\operatorname{Re}\{\zeta_{i1}\}, \operatorname{Re}\{\zeta_{i2}\} \leq -\bar{\delta}/2$, 即 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ 满足 $\operatorname{Re}\{\lambda_{i1}\}, \operatorname{Re}\{\lambda_{i2}\} \leq -\mu_i \bar{\delta}/2, \quad \forall i \geq i_0$ 。令 $-\bar{\delta} = \max_{0 \leq i \leq i_0} \{\operatorname{Re}\{\lambda_{i1}\}, \operatorname{Re}\{\lambda_{i2}\}\}$, 则有 $\bar{\delta} > 0$, 且取 $\bar{\delta} = \min\{\bar{\delta}, \bar{\mu}_{i_0}/2\}$, 故 L 的谱 $-\bar{\delta}$ 都是实部小于的特征值组成的。所以有下面定理。

定理 2: 当 $a > 1$ 时, E^* 对于问题 (2) 是局部渐近稳定的。

2.2 全局稳定性

接下来给出正平衡解 E^* 的全局稳定性。根据定理 1, 系统 (2) 的解 $u(x, t)$ 在 $\bar{\Omega}$ 中一致有界, 即存在正常数 $C \geq 0$, 使得 $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq C, \quad \forall t \geq 0$ 。再根据文献 [8] 有 $\|u(\cdot, t)\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C, \quad \forall t \geq 1$ 。

定义 $V(u, v) = \int_{u^*}^u \frac{\zeta - u^*}{\zeta^2} du + c \int_{v^*}^v \frac{\eta - v^*}{\eta} dv, c > 0$, 其中 c 待定。定义 Liapunov 泛函: $E(t) = \int_{\Omega} V dx, E(t) \geq 0, t \geq 0$ 。利用方程计算得

$$E'(t) = \int_{\Omega} (V_u u_t + V_v v_t) dx \triangleq A + B,$$

$$A = - \int_{\Omega} \left[d_1 \frac{2u^* - u}{u^3} |\nabla u|^2 + d_2 \frac{v^*}{v^2} |\nabla v|^2 \right] dx,$$

$$B = \int_{\Omega} \left[\frac{u - u^*}{u} \left(1 - u - \frac{v}{av + u} \right) + c \gamma (v - v^*) \left(1 - \theta \frac{v}{u} \right) \right] dx =$$

$$\int_{\Omega} \left\{ (u - u^*)^2 \left[-\frac{1}{u} + \frac{v^*}{u(av + u)(av^* + u^*)} \right] - \frac{c \gamma}{u} (v - v^*)^2 + \right.$$

$$\left. \left[\frac{c \gamma^2}{u u^*} - \frac{u^*}{u(av + u)(av^* + u^*)} \right] (u - u^*)(v - v^*) \right\} dx \leq$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{K^2 \theta} \right] (u - u^*)^2 - \frac{c \gamma}{u} (v - v^*)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1 + c \gamma K}{\theta K^2} |(u - u^*)(v - v^*)| \right\} dx \leq$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{K^2 \theta} + \frac{1 + c \gamma K}{\theta K^2} \epsilon \right] (u - u^*)^2 + \right.$$

$$\left. \left[-c \gamma + \frac{1 + c \gamma K}{4 \epsilon \theta K^2} \right] (v - v^*)^2 \right\} dx$$

因为 $a + \theta > 2, \theta K^2 > 1$, 让 c 满足 $(1 + c \gamma K)^2 < 4 \theta K^2 (\theta K^2 - 1)$, 则得

$$E'(t) = A + B \leq -C \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx -$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{K^2 \theta} + \frac{1 + c \gamma K}{\theta K^2} \epsilon \right] (u - u^*)^2 + \right.$$

$$\left. \left[-c \gamma + \frac{1 + c \gamma K}{4 \epsilon \theta K^2} \right] (v - v^*)^2 \right\} dx \triangleq \chi_3(t) + \chi_4(t)$$

其中 $\chi_3(t) = -C \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx,$

$$\chi_4(t) = - \int_{\Omega} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{K^2 \theta} + \frac{1 + c \gamma K}{\theta K^2} \epsilon \right] (u - u^*)^2 + \right.$$

$$\left. \left[-c \gamma + \frac{1 + c \gamma K}{4 \epsilon \theta K^2} \right] (v - v^*)^2 \right\} dx.$$

显然 $\chi'_3(t), \chi'_4(t)$ 在 $[1, \infty)$ 有界。由文献 [9] $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi_3(x, t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_4(x, t) = 0$, 即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u - u^*)^2 dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v - v^*)^2 dx = 0 \quad (7)$$

由 (6) 式和 Poincare 不等式得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \{ (u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2 \} dx = 0 \quad (8)$$

这里对于 $f \in L^1(\Omega), \bar{f} = \int_{\Omega} f dx / |\Omega|$ 。由 (7) 式和 (8) 式可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{u} - u^*)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\bar{u} - u^*)^2 dx / |\Omega| \leq$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(\int_{\Omega} (\bar{u} - u)^2 dx + \int_{\Omega} (u^* - u)^2 dx \right) / |\Omega| \right\} = 0 \quad (9)$$

因为 $\|u(\cdot, t)\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C, \forall t \geq 1$, 所以存在 $\{t_m\} \geq 1, 0 \leq w \in C^2(\bar{\Omega})$, 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t_m) - w\|_{C^2(\bar{\Omega})} = 0 \quad (10)$$

由 (8) ~ (10) 式可得 $w \equiv u^*$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t_m) - w\|_{C^2(\bar{\Omega})} = 0$, 由前面讨论可知, u^* 是局部渐近稳定的, 所以可以得到当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $(u(x, t), v(x, t)) \rightarrow (u^*, v^*)$ 。根据以上的讨论, 有下面定理:

定理 3: 当 $a + \theta > 2, \theta K^2 > 1$ 时, E^* 是全局渐近稳定的。

注: 定理 3 说明当整个捕食系统对食饵的的最大承受力以及净增长率足够大时, 如果捕食者对食饵的捕获率足够小时, 则唯一的正常数解是全局渐近稳定的。

参考文献:

- [1] Cavani M, Lizana M, Smith H L. Stable periodic orbit for a predator-prey model with delay [J]. J Math Anal Appl. 2000, 249: 324-339.
- [2] Kuang Y, Beretta E. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system [J]. J Math Biol. 1998, 36: 389-406.
- [3] Murdoch W, Oaten A. Predation and population stability [J]. Adv Ecol Res. 1975, 9: 1-125.
- [4] Hsu S B, Hwang T W, Kuang Y. A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control [J]. J Math Biosci. 2003, 181: 55-83.
- [5] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统 [M]. 北京: 科学出版社, 1993. 60-69.
- [6] 高建国. 基于比率的 Holling-Tanner 系统全局渐近稳定性 [J]. 生物数学学报, 2005, 2 (6): 39-42.
- [7] Leslie P H, Gower J C. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species [J]. Biometrika. 1960, 47: 319-334.
- [8] Birkhoff G, Rota G C. Ordinary Differential Equations [M]. Boston: Ginn, 1982.
- [9] 王明新. 非线性抛物方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.