文章编号：1673－9620（2007）04－0063－02

带复常数的 AKNS 方程组的精确解*

刘玉清
（江苏工业学院 数理学院，江苏 常州 213164）

摘要：AKNS 方程是重要的孤子方程，寻找孤立子解的方法往往在该方程上加以验证。考虑了这一方程系数为复常数的情况，使通常的 AKNS 方程成为特例。

关键词：AKNS 方程；双线性方法；精确解
中图分类号：O 175 2　　　文献标识码：A

Exact Solution to the AKNS Equation with Complex Constant Coefficients

LIU Yu－qing
（School of Physics & Mathematics，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213164，China）

Abstract：The AKNS Equation is an important soliton equation and many methods for soliton solutions are verified by it．The equations with Complex Constant Coefficients including the classical AKNS equation as example is considered，and the exact solution is found．

Key words：AKNS equations；bilinear method；exact solution

AKNS 方程族可以看成是谱问题

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}_x=\begin{pmatrix}-\lambda & q\\ r & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix},$$

和下述时间发展式的相容性条件[1]：

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

其中谱参数 λ 是复数，$q=q(t, x)$，$r=r(t, x)$ 是光滑位势函数，A，B，C 是变量 t，x，位势 q，r 及谱参数 λ 的函数，ϕ_1，ϕ_2 是谱问题的本征函数。AKNS 方程组对应族中第二个方程。由于此方程族可以约化为许多孤子方程而备受重视，至今仍有许多研究，比如对非等谱高阶方程的求解[2]，对推广的未知量为向量函数情况的研究[3]。本文从方程的系数出发，考虑如下的系数带复常数的方程：

$$\begin{cases}q_t=\alpha q_{xx}-\beta\,|q|^2 r\\ r_t=-\alpha^* r_{xx}+\beta^* q\,|r|^2\end{cases}\qquad(1)$$

其中 $\alpha\neq0$，“ * ”表示共轭。若 $\alpha=-1$，$\beta=-2$ 就是标准的 AKNS 方程，若 $\alpha=-\beta=\sqrt{-1}$，$q=r$ 就对应非线性 Schrödinger 方程。众所周知，孤子方程对系数的依赖性很强。AKNS 方程族中方程首项系数一般是相等或互为相反数，方程（1）选用反共轭系数则是结合了非导数项的特点，在其他阶数的 AKNS 方程中没有如此简单的结果。

1　方程的解

这里用双线性导数法[1,4]来求方程（1）的精确解。作独立变量变换：$q=g/f$，$r=h/f$，f，g，h 均为 t，x 的函数并且总可让 $f(t, x)$ 取为实函数。引进双线性算子 D[1]：

* 收稿日期：2007－03－23
作者简介：刘玉清（1966－），男，江苏常州人，副教授，现从事程孤立子与可积系统理论研究。

$D_t^\beta D_x^\alpha g \circ f = (\partial_t - \partial_{t'})^\beta (\partial_x - \partial_{x'})^\alpha g(t,x) f(t',x')\,|_{x'=x,\, t'=t}$

则由于 $q_t = \frac{D_t g \circ f}{f^2}$，$q_{xx} = \frac{D_x^2 g \circ f}{f^2} - \frac{g}{f}\frac{D_x^2 f \circ f}{f^2}$，方程化为如下双线性形式：

$$\begin{aligned} &\alpha D_x^2 f \circ f = -\beta g^* h \\ &D_t g \circ f = \alpha D_x^2 g \circ f \\ &D_t h \circ f = -\alpha^* D_x^3 h \circ f \end{aligned} \qquad (2)$$

按照截断法[1]的思想把未知函数 f，g，h 作如下幂级数展开：

$$f(t,x) = 1 + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(4)}\varepsilon^4 + \cdots + f^{(2j)}\varepsilon^{2j} + \cdots$$
$$g(t,x) = g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \cdots + g^{(2j+1)}\varepsilon^{2j+1} + \cdots$$
$$h(t,x) = h^{(1)}\varepsilon + h^{(3)}\varepsilon^3 + \cdots + h^{(2j+1)}\varepsilon^{2j+1} + \cdots$$

并代入（2）式，比较 ε 的同次幂系数得：

$$\varepsilon^1:\ D_t g^{(1)} \circ 1 = \alpha D_x^2 g^{(1)} \circ 1$$
$$\quad D_t h^{(1)} \circ 1 = -\alpha^* D_x^2 h^{(1)} \circ 1 \qquad (3)$$
$$\varepsilon^2:\ 2\alpha D_x^2 f^{(2)} \circ 1 = -\beta g^{(1)*} \circ h^{(1)}$$
$$\varepsilon^3:\ D_t(g^{(1)} \circ f^{(2)} + g^{(3)} \circ 1) = \alpha D_x^2 (g^{(1)} \circ f^{(2)} + g^{(3)} \circ 1)$$
$$\quad D_t(h^{(1)} \circ f^{(2)} + h^{(3)} \circ 1) = -\alpha^* D_x^3 (h^{(1)} \circ f^{(2)} + h^{(3)} \circ 1) \qquad (4)$$
$$\varepsilon^4:\ \alpha D_x^2 f^{(2)} \circ f^{(2)} + 2\alpha D_x^2 f^{(4)} \circ 1 = -\beta(g^{(1)*} \circ h^{(3)} + g^{(3)*} \circ h^{(1)})$$

……

把双线性算子展开，就可得到满足条件的特解。一般地可取

$$g^{(1)} = \sum_{j=1}^n A_j e^{\zeta_j},\ \zeta_j = k_j x + \rho_j t,\ \rho_j = \alpha k_j^2,$$
$$h^{(1)} = \sum_{j=1}^n B_j e^{\eta_j},\ \eta_j = l_j x + \pi_j t,\ \pi_j = -\alpha^* l_j^2$$

代入（3）式可得

$$f^{(2)} = -\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{i,j=1}^n A_i^* B_j \frac{e^{\zeta_i^* + \eta_j}}{(k_i^* + l_j)^2}$$

但由于 f 是实函数，故要求

$$k_i^* + l_j,\ -\frac{\beta}{2\alpha}A_i^* B_j,\ \alpha^*(k_i^* - l_j) \text{ 均为实数}，i,j = 1, 2, \cdots, n \qquad (5)$$

因此，可以设

$$k_j = \lambda_j + \sqrt{-1}\sigma,\ l_j = \tau_j + \sqrt{-1}\sigma,\ j = 1, 2, \cdots, n \qquad (6)$$

若设 $\alpha = p + \sqrt{-1}\mu$，则还应满足

$$\mu(\lambda_i - \tau_j) = -2p\sigma,\ i, j = 1, 2, \cdots, n \qquad (7)$$

（4）式推出 $g^{(3)}$ 满足的方程：

$$g_t^{(3)} - \alpha g_{xx}^{(3)} = \alpha D_x^2 g^{(1)} \circ f^{(2)} - D_t g^{(1)} \circ f^{(2)} =$$
$$-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{s,i,j=1}^n \frac{A_s A_i^* B_j}{k_i^* + l_j} e^{\zeta_s + \zeta_i^* + \eta_j}[-\alpha(2k_s - k_i^* - l_j) + \alpha^*(k_i^* - l_j)] =$$
$$-\beta\sum_{s,i,j=1}^n \frac{A_s A_i^* B_j}{k_i^* + l_j} e^{\zeta_s + \zeta_i^* + \eta_j}(k_i - k_s) \qquad (8)$$

特别考虑 $n = 1$ 的情况。可以取 $g^{(3)} = 0$，同理 $h^{(3)} = 0$，从而 $f^{(4)} = 0$，这样进一步又可得到 $g^{(2j+1)} = h^{(2j+1)} = 0$，$f^{(2j)} = 0$，2，3，…

如此，f，g，h 的表达式就被截断，让 $\varepsilon = 1$ 就有方程（1）的解：

$$q = \frac{A_1 e^{\zeta_1}}{1 - \frac{\beta A_1^* B_1}{2\alpha(k_1^* + l_1)^2} e^{\zeta_1^* + \eta_1}}$$
$$r = \frac{B_1 e^{\eta_1}}{1 - \frac{\beta A_1^* B_1}{2\alpha(k_1^* + l_1)^2} e^{\zeta_1^* + \eta_1}} \qquad (9)$$

2 结论分析

分析（9）式。A_1，B_1 应满足（5）式，可假设 $A_1 = a_1 + \sqrt{-1}a_2$，$B_1 = b_1 + \sqrt{-1}b_2$。q，r 的分母是实函数，还写为 f，则

$$q = \frac{1}{f(t,x)}\exp\{\lambda_1 x + [p(\lambda_1^2 - \sigma^2) - 2\lambda_1\sigma\mu]t\}[(a_1\cos\varphi - a_2\sin\varphi) + \sqrt{-1}(a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi)]$$

$$r = \frac{1}{f(t,x)}\exp\{\tau_1 x + [p(\tau_1^2 - \sigma^2) - 2\tau_1\sigma\mu]t\}[(b_1\cos\varphi - b_2\sin\varphi) + \sqrt{-1}(b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi)]$$

其中 $\varphi(t,x) = \sigma x + \mu(\lambda_1\tau_1 - \sigma^2)t$，特别当 $A_1 = B_1$ 时 q，r 沿 $\sigma x + \mu(\lambda_1\tau_1 - \sigma^2)t = -\arctan b_2/b_1$ 取实值。

参考文献：

[1] 陈登远. 孤子引论 [M]. 北京：科学出版社，2006

[2] Jin_Bo Bi, Ye_Peng Sun, Deng_Yuan Chen. Soliton solutions to the 3rd nonisospectral AKNS system [J]. Physica A, 2006, (364): 157－169.

[3] MA WENXIU, ZHOU RUGUANG, ADJOINT SYMMETRY CONSTRAINTS OF MULTICOMPONENT AKNS EQUATIONS [J]. CHIN ANN OF MATH, 2002, (23B): 373－384.