文章编号：1673－9620（2008）02－0031－03

一类具有时变时滞的 Hopfield 神经网络的全局指数渐进稳定性*

康慧燕，陈芳芳
（江苏工业学院 数理学院，江苏 常州 213164）

摘要：利用 **M**－矩阵和不等式方法，给出了一类具有时变时滞的 Hopfield 神经网络模型的平衡点的存在性及其全局指数渐进稳定性的充分性判据。

关键词：神经网络；时滞；全局渐近稳定性
中图分类号：O 175.13　　文献标识码：A

Globally Exponential Asymptotic Stability of a Class of Hopfield Neural Networks with Time－Varying Delays

KANG Hui－yan，CHEN Fang－fang
（School of Physics and Mathematics，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213164，China）

Abstract：By using **M**－matrix and inequality，the sufficient condition on a class of Hopfield neural networks with time－varying delays is given. Sufficient condition here not only guarantees the existence of the equilibrium for the delayed neural networks，but also its globally eponential asymptotic stability.

Ker words：neural networks；time－delayed；globally asymptotic stability

自 1982 年美国生物学家 J. J. Hopfield 提出 Hopfield 神经网络以来，神经网络理论和应用逐渐在国际上成为热门话题，对神经网络的研究也取得了引人注目的进展，特别是在模式识别、图像及语言信号处理、人工智能控制等领域的成功应用，使得神经网络的研究引起了许多领域学者的广泛关注[1~6]。对于连续的时间神经网络很多学者们讨论了模型的平衡点的存在性及全局渐进或指数稳定性。实际上，可变时滞神经网络更为普遍，在动态变化过程中，绝对的常时延很少，常数时延只不过是变时滞的一种理想化的近似，因此，对于可变时滞的神经网络的研究具有重要的理论意义和实用价值。

本文讨论如下时滞神经网络系统

$$x_i(t)=-c_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+p_i\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

$\tau_{ij}(t)=\tau_{ij}$，其中 $c_i>0$，n 表示神经网络单元个数，$x_i(t)$ 代表时刻 t 时第 i 个单元的状态，$f_j(x_j(t))$，$g_j(x_j(t))$ 表示时刻 t 时第 j 个单元的激活函数，a_{ij}，b_{ij}，c_i 为常数，a_{ij} 表示时刻 t 时第 j 个单元对第 i 个单元的作用力，b_{ij} 表示时刻 $t-\tau_{ij}$ 时第 j 个单元对第 i 个单元的作用力，p_i 代表

* 收稿日期：2007－07－04
作者简介：康慧燕（1973－），女，内蒙古包头人，硕士，讲师。

作用于第 i 个单元的外力，c_i 代表使第 i 个单元重新回到静止状态的速率。

引理 1[7]：$\boldsymbol{K}$ 是一个非奇异 $\boldsymbol{M}$－矩阵，它与下列条件之一等价：

① $\forall \boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{x}\neq 0$，存在正对角化矩阵 $\boldsymbol{D}$，使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KDx}>0$。

②存在正对角化矩阵 $\boldsymbol{D}$，使得

$$k_{ii}d_i>\sum_{j\neq 1}|k_{ij}|d_j \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2)$$

引理 2[8]：设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{L}=(l_{ij})_{n\times n}$，$\tau>0$ 是常数，向量值函数满足微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)\leqslant \boldsymbol{Hx}(t)+\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{x}}(t) \qquad t\geqslant 0$$

这里 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\cdots,\bar{x}_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\bar{x}_i(t)=\sup\{x_i(t)\mid t-\tau\leqslant s\leqslant t\}$，$i=1,2,\cdots,n$，如果 $h_{ij}\geqslant 0\ (i\neq j)$，$l_{ij}\geqslant 0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $-(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{L})$ 是非奇异 $\boldsymbol{M}$－矩阵，则存在一个常数 $\lambda>0$，和常向量 $\gamma\geqslant\bar{\boldsymbol{x}}(0)$，使得 $\boldsymbol{x}(t)\leqslant\gamma \mathrm{e}^{-\lambda t}$，$\forall t\geqslant 0$。

讨论系统（1），令 $0\leqslant\tau_{ij}(t)=\tau_{ij}\leqslant\tau$，$i,j=1,2,\cdots,n$，$\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$|\boldsymbol{A}|=(|a_{ij}|)_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，$|\boldsymbol{B}|=(|b_{ij}|)_{n\times n}$，对系统（1）作假设①存在常数 $\alpha_j>0$，$\beta_j>0$，使得连续函数 $f_j,g_j:R\to R$ 满足

$$|f_j(u)-f_j(v)|\leqslant\alpha_j|u-v|,\quad |g_j(u)-g_j(v)|\leqslant\beta_j|u-v|,$$

$$\forall u,v\in(-\infty,+\infty),\ j=1,2,\cdots,n \qquad (3)$$

令 $\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则可得下面结论

定理 1：在假设①下，如果 $\boldsymbol{C}-(|\boldsymbol{A}|\alpha+|\boldsymbol{B}|\beta)$ 是非奇异 $\boldsymbol{M}$－矩阵，那么系统（1）存在唯一的平衡点，且平衡点全局指数渐进稳定。

证明：首先证明系统（1）的平衡点的存在性，事实上，系统（1）的平衡点 $\boldsymbol{u}^*$ 满足如下方程

$$\boldsymbol{Cu}^*-\boldsymbol{Af}(\boldsymbol{u}^*)-\boldsymbol{Bgu}^*)-\boldsymbol{P}=0$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*)=(f_1(u^*),f_2(u^*),\cdots,f_n(u^*))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^*)=(g_1(u^*),g_2(u^*),\cdots,g_n(u^*))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，令 $\boldsymbol{F}:R^n\to R^n$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{Af}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{Bg}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{P})$，由定理 1 以及引理 1 知，存在正常数 $d_1,d_2,\cdots,d_n$，使得

$$d_i(c_i-|a_{ii}|\alpha_i-|b_{ii}|\beta_i)>\sum_{j\neq i}(|a_{ij}|\alpha_i+|b_{ij}|\beta_j)d_j,\quad i=1,2,\cdots,n$$

因此存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{1}{d_ic_i}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j)d_j\right]\leqslant c<1$$

$\forall \boldsymbol{u}\in R^n$，规定 $\|u\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(d_i^{-1}|u_i|)$，则 $\forall \boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{u}^2\in R^n$，有

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^1)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^2)\|=\|\boldsymbol{C}^{-1}\{\boldsymbol{A}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^2)]+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^1)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^2)]\}\|=$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i^{-1}|\sum_{j=1}^{n}c_i\{a_{ij}[f_j(u^1)-f_j(u^2)]+B[g(u^1)-g(u^2)]+b_{ij}[g_j(u^1)-g_j(u^2)]\}|\}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}c_i^{-1}[|a_{ij}||u_j^1-u_j^2|\alpha_j+|b_{ij}||u_j^1-u_j^2|\beta_j]\}=$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i^{-1}c_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}[|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j]d_jd_j^{-1}|u_j^1-u_j^2|\}\leqslant$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i^{-1}c_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}[|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j]d_j\}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{d_j^{-1}|u_j^1-u_j^2|\}\leqslant c\|\boldsymbol{u}^1-\boldsymbol{u}^2\|$$

故 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ 是 R^n 上的压缩映射，由压缩映射原理，必存在唯一一点 $\boldsymbol{u}^*$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^*)=\boldsymbol{u}^*$，即系统（1）有唯一的平衡点。

下证系统（1）的平衡点是全局指数渐进稳定的，设系统（1）的平衡点为 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$，令 $y_i(t)=x_i(t)-x_i^*$，$i=1,2,\cdots,n$，由系统（1）可得

$$\dot{y}_i(t)=-c_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(y_j(t)+x_j^*)-f_j(x_j^*)]+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[g_j(y_j(t-\tau_{ij})+x_j^*)-g_j(x_j^*)] \qquad (4)$$

由（3）式可得

$$|f_j(y_j(t)+x_j^*)-f_j(x_j^*)|\leqslant\sigma_j|y_j(t)|$$

$$|g_j(y_j(t-\tau_{ij})+x_j^*)-g_j(x_j^*)|\leqslant\beta_j|y_j(t-\tau_{ij})|$$

令 $\bar{\boldsymbol{y}}(t)=(\bar{y}_1(t),\bar{y}_2(t),\cdots,\bar{y}_n(t))^{\mathrm{T}}$，$t\geqslant 0$，且 $\bar{y}_i(t)=\sup\{\bar{y}_i(t)\mid t-\tau\leqslant s\leqslant t\}$，$i=1,2,\cdots,n$。那么当 $0\leqslant\tau_{ij}=\tau_{ij}(t)\leqslant\tau$，由（4）式有 $\dot{\boldsymbol{y}}(t)\leqslant-\boldsymbol{Cy}(t)+[|\boldsymbol{A}|\alpha+|\boldsymbol{B}|\beta]\bar{\boldsymbol{y}}(t)$，$\forall t\geqslant 0$。又 $\boldsymbol{C}-(|\boldsymbol{A}|\alpha+|\boldsymbol{B}|\beta)$ 是非奇异 $\boldsymbol{M}$－矩阵，由引理 2 可得系统（4）的零解是全局指数渐进稳定的，所以系统（1）的平衡点是全局指数渐进稳定的。

推论 1：在①条件下，若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\frac{1}{2c_i}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+$

$|b_{ij}|\beta_j+|a_{ji}|\alpha_i+|b_{ji}|\beta_i)<1$，则系统（1）的平衡点是全局指数渐进稳定的。

证明：$\forall \boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，$x\neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j)x_ix_j\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j)\frac{1}{2}(x_i^2+x_j^2)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j+|a_{ji}|\alpha_i+|b_{ji}|\beta_i)x_i^2$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}-(|\boldsymbol{A}|\alpha+|\boldsymbol{B}|\beta)]\boldsymbol{x}=$$
$$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j)x_ix_j\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j+|a_{ji}|\alpha_i+|b_{ji}|\beta_i)x_i^2=$$
$$\sum_{i=1}^{n}[c_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|\alpha_j+|b_{ij}|\beta_j+|a_{ji}|\alpha_i+|b_{ji}|\beta_i)]x_i^2$$

由引理1：$\boldsymbol{C}-(|\boldsymbol{A}|\alpha+|\boldsymbol{B}|\beta)$是非奇异$\boldsymbol{M}$—矩阵，再由定理1，系统（1）的平衡点是全局指数渐进稳定的。

注1：当$f_j=g_j$，$j=1, 2, \cdots, n$时，本文的定理1就是文献[2]中的定理2。

注2：本文所得的判据去掉了激活函数的有界性和可微性，因而具有更宽的适用范围，且结果易于检验。

参考文献：

[1] 蒋秋浩，曹进德. 具有时变时滞的神经网络的全局指数稳定性[J]. 工程数学学报，2006，23（2）：373—376

[2] Chen Wanyi. Globally exponential asymptotic stability of Hopfield neural netwirk with time—varying delays[J]. 南开大学学报，2005，38（5）：81—86.

[3] Cao J，Chen A，Huang X. Almost periodic attractor of delayed neural networks with variable coefficients[J]. Physics Letters A，2005，340：104—120.

[4] 陈安平，廖六生. 一类Hopfield神经网络系统的全局渐进稳定性[J]. 模糊系统与数学，2001，15（2）：94—96.

[5] Cao Jinde. Stability in a class of contiuously distributed delays model[J]. 工程数学学报，1999，16（3）：37—42.

[6] 刘晓林，袁昆. 全局渐进稳定的时滞细胞神经网络模型研究[J]. 中国民航学院学报，2006，24（5）：39—41.

[7] Berman A，Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York：Academic Press，1979.

[8] Gopalsamy K. Stability and oscillations in delayed differential equations of poplation dynamics[M]. New York：Kluwer Academic Publishers，1992.