

文章编号: 1673 - 9620 (2008) 02 - 0059 - 04

高阶传统型差分格式在 Level Set 方法中的应用^{*}

李 栋

(江苏工业学院 机械与能源工程学院, 江苏 常州 213016)

摘要: 随着界面追踪方法的发展, 各种高分辨率、高精度的差分格式得到了广泛的应用。在实际计算中, 有时人们只追求差分格式的形式, 采用流行的差分格式, 忽略了高阶传统型差分格式不仅构造简单, 而且具有良好的分辨率。用 5 阶迎风偏斜格式、积分平均型 TVD 格式和 5 阶 WENO 格式求解 Level Set 方程, 通过求解典型的界面追踪数值算例, 发现用 5 阶迎风偏斜差分格式求解 Level Set 方程不仅构造简单而且计算结果具有很高的精度。

关键词: 迎风格式; WENO 格式; Level Set 方程

中图分类号: O 359

文献标识码: A

Numerical Study of High Order Traditional Scheme in Level Set Method

LI Dong

(School of Mechanical and Energy Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: Along with the development of method for tracing interface, high order and high resolution scheme were used widely. In actual computation, people pay attention to the scheme shape, and use the popular scheme sometimes, and ignore the high order traditional scheme which has simple structure and high resolution. In this paper, the Level Set equation is solved with 5th order upwind deflective scheme, TVD integrate average method and 5th WENO scheme, and by solving the classical examples of tracing interface, the author found that solving Level Set equation with 5th order upwind deflective scheme has simple structure and highly accurate results.

Key words: upwind scheme; WENO scheme; Level Set equation

随着界面追踪方法的发展, 出现了各种高分辨率、高精度的差分格式, 并得到了广泛的应用。而在实际计算中, 有时人们只追求高分辨率的差分格式, 而不注重实际应用, 传统的高精度差分得不到足够的重视。本文简要介绍了界面追踪的 Level Set 方法和 5 阶迎风偏斜差分格式、积分平均型 TVD 格式、5 阶 WENO 差分格式的构造形式, 并用 5 阶迎风偏斜差分格式、积分平均型 TVD 格式、5 阶 WENO 差分格式求解 Level Set 方程, 通

过数值算例验证了用 5 阶偏斜迎风格式求解 Level Set 方程有着明显的优势。

1 界面追踪的 Level Set 方法

界面追踪的 Level Set 方法^[1~3]是 1988 年 Osher 等人提出的, 并在许多复杂的界面追踪问题中得到验证。Level Set 方法不需要显示追踪运动界面, 在处理界面的合并、交叉、破碎上有着明显的优势。

^{*} 收稿日期: 2007 - 10 - 24

作者简介: 李栋 (1981 -), 男, 山西长治市人, 助教, 硕士。

Level Set 方法把随时间运动的物质界面看作某个函数 $\phi(\vec{x}, t)$ 的零等值面, $\phi(\vec{x}, t)$ 满足一定的方程。在每个时刻 t , 只要求出函数的值, 就知道运动界面的位置。

构造函数 $\phi(\vec{x}, t)$, 使得在任意时刻, 运动界面 $\Gamma(t)$ 恰是 $\phi(\vec{x}, t)$ 的零等值面, 即

$$\Gamma(t) = \{ \vec{x} \mid \phi(\vec{x}, t) = 0 \} \quad (1)$$

$\phi(\vec{x}, t)$ 的初值应满足 $\Gamma(t)$ 附近为法向单调, 在 $\Gamma(t)$ 上为零。一般可取 $\phi(\vec{x}, t)$ 为 \vec{x} 点到界面 $\Gamma(0)$ 的符号距离:

$$\phi(\vec{x}, 0) = \begin{cases} d(\vec{x}, \Gamma(0)) & \vec{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \vec{x} \in \Gamma(0) \\ -d(\vec{x}, \Gamma(0)) & \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $d(\vec{x}, \Gamma(0))$ 表示 \vec{x} 到 $\Gamma(0)$ 的距离, $\Omega_1 = \Omega_2$ 。

为了保证在任意时刻函数 ϕ 的零等值面就是活动界面 ϕ 要满足一定的控制方程。在任意时刻 t , 对于活动界面 $\Gamma(t)$ 上的任意点 \vec{x} , $\phi(\vec{x}, t) = 0$, 从而有

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3)$$

其中 $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, 方程 (3) 为 Level Set 方程。

对于具体问题, 方程 (3) 有具体形式。在自由界面追踪或两相流问题中, 物理量控制方程一般是 N-S 方程, 则方程 (3) 就是

$$\phi_t + u \phi_x + v \phi_y = 0 \quad (4)$$

其中, \vec{u} 是流体速度。

为了保持 $\phi(\vec{x}, t)$ 的符号距离性质, 在每个计算步采用一个所谓重新初始化的手段, 通过求解初值问题的稳定解来实现。

2 差分格式简介

2.1 5 阶偏斜迎风格式^[4]

一阶导数传统的差分格式的一般表达式如下:

$$F_j = \sum_l a_l (u_{j+l+1} - u_{j+1}) \quad (5)$$

其中 $\sum_l a_l = 1$ 。

利用 Taylor 级数展开, 使得上式右端一阶导数的系数和等于左端 F_j 的系数。5 阶迎风偏斜差分格式如下:

$$\begin{cases} F_j^+ = \frac{1}{60} (-3u_{j+2} + 30u_{j+1} + 20u_j - 60u_{j-1} + 15u_{j-2} - 2u_{j-3}) & c > 0 \\ F_j^- = \frac{1}{60} (3u_{j-2} - 30u_{j-1} - 20u_j + 60u_{j+1} - 15u_{j+2} + 2u_{j+3}) & c < 0 \end{cases} \quad (6)$$

2.2 积分平均型 TVD 格式^[1]

积分平均型 TVD 格式是把求解函数构造成分片的线性函数, 用特征线方法推进时间步, 并利用 Superbee 限制器对斜率加以限制, 以使格式保持单调, 具有 TVD 性质。

积分平均型 TVD 格式的一般形式如下:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - r \max(0, c) (u_i^n - u_{i-1}^n) + 0.5 r \max(0, c) (d-1) (S_i^n - S_{i-1}^n) - r \min(0, c) (u_{i+1}^n - u_i^n) + 0.5 r \min(0, c) (d+1) (S_{i+1}^n - S_i^n) \quad (7)$$

式中 $d = \frac{u-t}{x}$, $r = \frac{t}{x}$, $S_i^n = \phi(\frac{\cdot}{i}) S_i^{LW,n}$, 其中 $x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $t = t_{n+1} - t_n$, $S_i^{LW,n} = (u_{i+1}^n - u_i^n) / x$, $\phi(\frac{\cdot}{i}) = \max(0, \min(1, 2\frac{\cdot}{i}))$, $\min(2, \frac{\cdot}{i})$, 是斜率。

2.3 5 阶 WENO 格式^[5]

5 阶 WENO 格式的构造方法如下:

$$h_{i+1/2} = \omega_0 h_{i+1/2}^0 + \omega_1 h_{i+1/2}^1 + \omega_2 h_{i+1/2}^2 \quad (8)$$

其中, ω_i ($i=1, 2, 3$) 是加权系数。

$h_{i+1/2}^0, h_{i+1/2}^1, h_{i+1/2}^2$ 的计算如下:

$$h_{i+1/2}^0 = \frac{1}{3} h_{i-2} - \frac{7}{6} h_{i-1} + \frac{11}{6} h_i \quad (9)$$

$$h_{i+1/2}^1 = -\frac{1}{6} h_{i-1} + \frac{5}{6} h_i + \frac{1}{3} h_{i+1} \quad (10)$$

$$h_{i+1/2}^2 = \frac{1}{3} h_i + \frac{5}{6} h_{i+1} - \frac{1}{6} h_{i+2} \quad (11)$$

加权系数的构造方法如下:

$$\omega_0 = \frac{0}{0+1+2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{0+1+2}, \quad \omega_2 = \frac{2}{0+1+2},$$

其中 $\omega_0 = \frac{1}{(1+IS_0)^2}$, $\omega_1 = \frac{1}{(1+IS_1)^2}$, $\omega_2 =$

$$\frac{1}{(1+IS_2)^2}, \quad IS_0 = 13(a-b)^2 + 3(a-3b)^2, \quad IS_1 = 13(b-c)^2 + 3(b+c)^2, \quad IS_2 = 13(c-d)^2 + 3(3c-d)^2, \quad \epsilon = 10^{-7}, \quad a = h_{i-2} - h_{i-1}, \quad b = h_{i-1} - h_i, \quad c = h_i - h_{i+1}, \quad d = h_{i+1} - h_{i+2}.$$

3 数值算例分析

应用 Level Set 方法求解典型的运动界面追踪问题的算例（常速度场、旋转流场、剪切流场），在相同的网格和时间步长的情况下，用 5 阶迎风偏斜差分格式、积分平均型 TVD 格式、5 阶 WENO 差分格式求解 Level Set 方程，并对计算结果进行对比。数值计算中，各物理量为无量纲物理量。

3.1 常数速度场

计算初值如图 1 所示，同心框之间的区域赋值 1.0，在其它区域赋值 0.0，速度场为 $(u, v) = (2, 1)$ 。计算时采用相同的网格节点。时间 $t = 0.5$ 时的计算结果如图 2 所示。图中给出的是从 0.0625 到 0.9375 的 15 条密度等值线，可以看出

用 5 阶迎风偏斜差分格式、积分平均型 TVD 格式的求解结果不仅在角点处保持尖锐，且 15 条密度等值线之间的距离能保持很小，而 5 阶 WENO 格式在界面角点处有所光滑，比其它两种方法模拟效果要差一些。

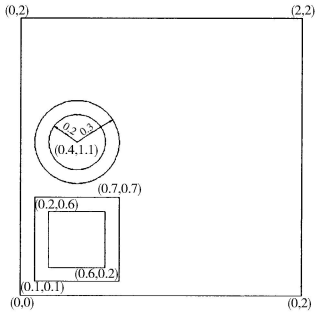


图 1 常数速度场算例计算模型
Fig 1 Model of constant velocity field

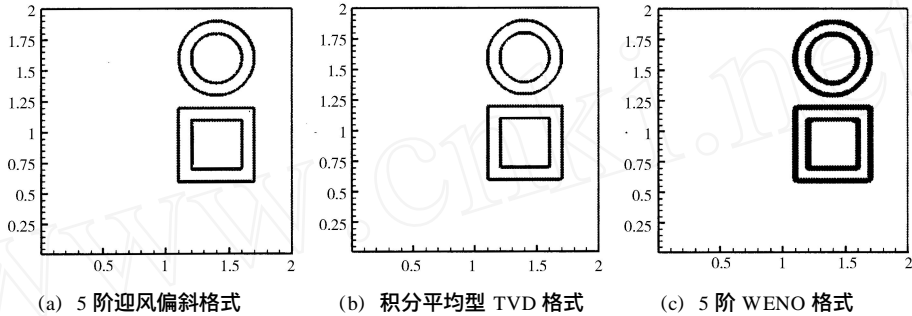


图 2 常数速度场算例计算结果
Fig 2 The results of constant velocity field

3.2 旋转流场

这是 Zaleska 模型的运动界面问题^[1]，运动界面形状的初态如图 3 所示，半径为 0.4，圆心在 $(0.5, 0.5)$ 的圆，圆的下面有一个方形缺口，在圆心垂直下方，且对称，宽度为 0.15。主场给出的是一种旋转流场，即速度场为： $V = (u, v) = (- (y - 0.5), (x - 0.5))$ 。

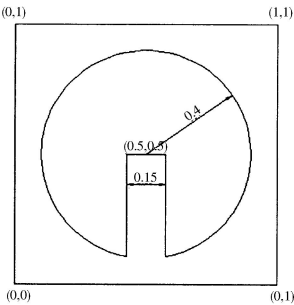


图 3 旋转流场算例计算模型
Fig 3 Model of rotation field

运动界面经过一定时间的追踪后，再采用相反的速度场计算相同的时间，检验是否有复原的效果

和其失真程度。 $t = 1.0$ 时的计算结果如图 4 所示。可以看出 5 阶迎风偏斜差分格式的计算结果有着较高的分辨率，且在角点处保持尖锐；积分平均型 TVD 格式的计算结果在圆弧与直线相交处有些变形；5 阶 WENO 格式的计算结果在各尖角处都有所变形。

3.3 剪切流场

在剪切流场速度的作用下，模拟一个圆形水滴的运动界面追踪过程，其数学模型如图 5 所示。主场给出的是一种剪切流场，即速度场为：

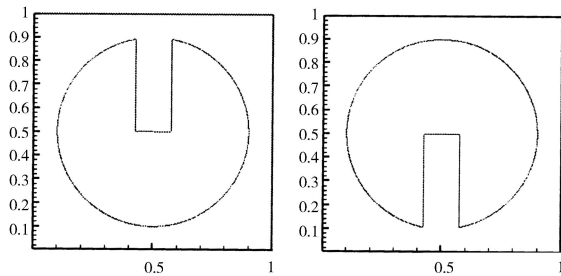
$$u = - \cos (x - 0.5) \sin (y - 0.5),$$
$$v = \sin (x - 0.5) \cos (y - 0.5).$$

运动界面经过一定时间的追踪后，再采用相反的速度场计算相同的时间，检验是否有复原的效果和其失真程度。 $t = 2.0$ 时的计算结果如图 6 显示了计算 $t = 2.0$ 时的计算结果。可以看出 3 种差分格式计算剪切时结果相同，5 阶迎风偏斜差分格式的复原效果和 5 阶 WENO 格式要比积分平均型

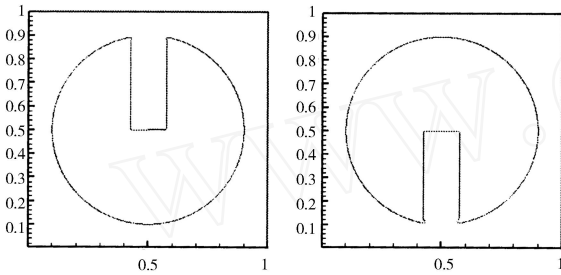
TVD 格式好。

4 结 论

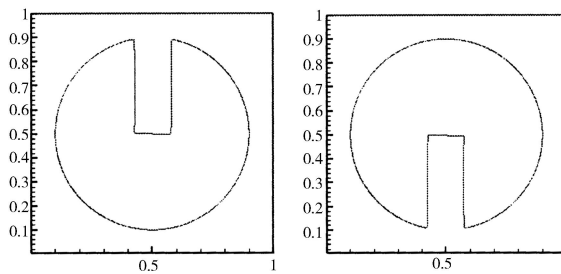
通过 4 个界面追踪的数值算例可以看出, 用 5 阶迎风偏斜差分格式求解 Level Set 方程得到的数值解和用积分平均型 TVD 格式和 5 阶 WENO 格式求解 Level Set 方程得到的数值解都有着很高的分辨率; 从 4 个算例的计算结果分析来看 5 阶迎风偏斜差分格式的计算效果要好于另外两种差分方法, 而且它的构造简单。



(a) 5 阶迎风偏斜格式



(b) 积分平均型 TVD 格式



(c) 5 阶 WENO 格式

图 4 旋转流场的旋转和复原的计算结果

Fig 4 The rotation and reset results of rotation field

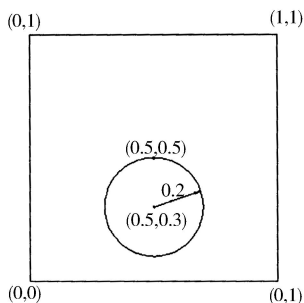
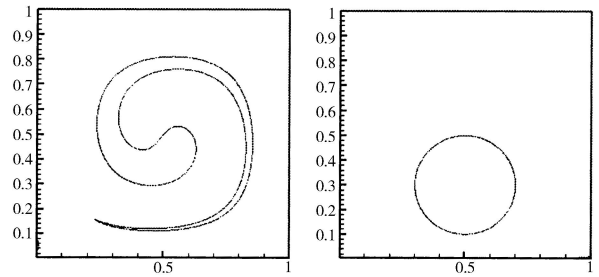
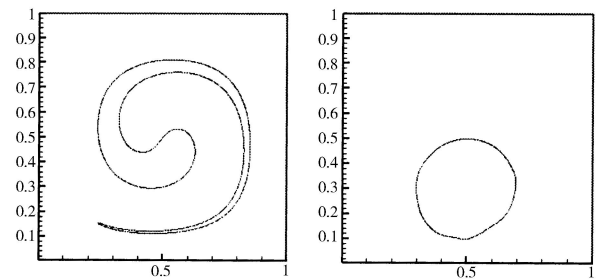


图 5 剪切流场算例计算模型

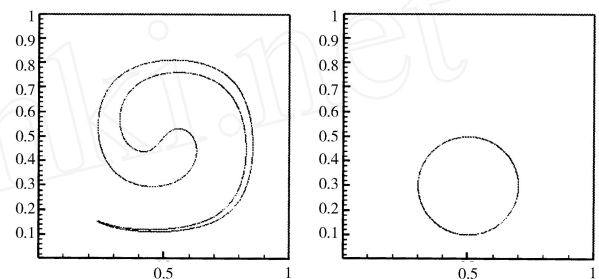
Fig 5 Model of shear field



(a) 5 阶迎风偏斜格式



(b) 积分平均型 TVD 格式



(c) 5 阶 WENO 格式

图 6 剪切流场的旋转和复原计算结果

Fig 6 The shear and reset results of shear field

参考文献:

- [1] 刘儒勋, 王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001.
- [2] 谷汉斌, 李炎保, 李绍武, 等. 界面追踪的 Level Set 和 Particle Level Set 方法 [J]. 水动力学研究与进展, 2005, 20 (2): 152 - 160.
- [3] Chang Y C, Hou T Y, Merriman B. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows [J]. Journal of computational Physics, 1996, 124 (2): 449 - 464.
- [4] 傅德薰, 马延文. 计算流体力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [5] Jin Shi, Changqing Hu, Chiwan Shu. A technique of treating negative weights in WENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2002, 175 (1): 108 - 127.