文章编号：1673－9620（2008）02－0063－03

论 $z_{xt}=0$ 到 $\varphi_{xt}=G(\varphi)$ 的 Bäcklund 变换*

马双琴
（常州轻工职业技术学院 教务处，江苏 常州 213164）

摘要：在波动方程 $z_{xt}=0$ 与二阶非线性偏微分方程 $\varphi_{xt}=G(\varphi)$ 之间，若存在由某种可积系统定义的 Bäcklund 变换 $z\to\varphi$，则可证明函数 G 只能是指数函数 $G(\varphi)=c_1e^{c_0\varphi}$（e=2.71828…，$c_0$ 与 c_1 为非零常量）的形式，相应的可积系统也同时被确定下来。

关键词：偏微分方程；可积系统；Bäcklund 变换
中图分类号：O 175.23 文献标识码：A

Study of Bäcklund Transformations from $z_{xt}=0$ to $\varphi_{xt}=G(\varphi)$

MA Shuang－qin
（Teaching Affair Office，Changzhou Institute of Light Industry Technology，Changzhou 213164，China）

Abstract: Between undulation equations $z_{xt}=0$ and nonlinear second－order partial differential equations $\varphi_{xt}=G(\varphi)$，if there exist Bäcklund transformations $z\to\varphi$ defined by a certain integrable system，it can be proved that function G is the only form of index functions $G(\varphi)=c_1e^{c_0\varphi}$（e=2.71828…，$c_0$，$c_1$ nonzero constants）. Meanwhile，the corresponding integrable systems can also be decided.

Key words: partial differential equation；integrable system；Bäcklund transformation

随着科学技术的进步，线性模型已不足以反映客观世界的变化规律，非线性科学正成为跨学科的研究前沿。20 世纪 50 年代以来，人们在对自然界非线性现象的研究中提出了“孤子”和“孤子方程”的概念，现今孤子已在许多科学技术领域中得到证实，且已成为非线性科学中的一个重大研究课题。在求解孤子方程的过程中，人们已总结出很多行之有效的方法，本文提到的 Bäcklund 变换就是其中的一种重要方法。

Bäcklund 变换是用瑞典数学物理学家、几何学家 Albert Victor Bäcklund（1845－1922）的名字命名的，他早在 1883 年就发现：假设 u 是 sine－Gordon 方程 $u_{xt}=\sin u$ 的一个解，则下列关于 φ 的系统

$$\begin{cases}\varphi_x=u_x-2\lambda\sin\dfrac{u+\varphi}{2}\\ \varphi_t=-u_t+\dfrac{2}{\lambda}\sin\dfrac{u-\varphi}{2}\end{cases}\qquad(1)$$

可积（其中 λ 是任意的非零常数），并且 φ 也满足 sine－Gordon 方程。这样由系统（1）就定义了 sine－Gordon 方程解之间的一个变换（称之为 Bäcklund 变换）$u\to\varphi$。由该变换，利用 sine－Gordon 方程的已知解 u，通过求解可积系统（1），即可得到该方程的新解 φ。随着孤子理论的发展，Bäcklund 变换已经成为求解某些非线性偏微分方程的有力工具[1~4]。

本文要说明的是，在波动方程 $z_{xt}=0$ 与二阶

* 收稿日期：2008－03－20
作者简介：马双琴（1969－），女，江苏金坛人，硕士，讲师。

非线性偏微分方程 $\varphi_{xt}=G(\varphi)$ 之间，若存在由可积系统 $\begin{cases}\varphi_x=P(\varphi, z, z_x, z_t)\\ \varphi_t=Q(\varphi, z, z_x, z_t)\end{cases}$ 定义的 Bäcklund 变换 $z\to\varphi$，那么函数 G 只能是指数函数 $G(\varphi)=c_1 e^{c_0\varphi}$ 的形式，同时也给出了函数 P 和 Q 的具体形式。

1 主要结果

设 z 是一类波动方程 $z_{xt}=0$ 的解，若关于 φ 的系统

$$\begin{cases}\varphi_x=P(\varphi, z, z_x, z_t)\\ \varphi_t=Q(\varphi, z, z_x, z_t)\end{cases} \tag{2}$$

可积，并且 φ 满足另外一个非线性偏微分方程 $\varphi_{xt}=G(\varphi)$，则可以确定其中的 3 个光滑函数 P，Q 和 G。本文始终假设 z，z_x，z_t，z_{xx}，z_{xt}，z_{tt} 都是彼此相互独立的，以后就不再一一说明。

由（2）式得，

$$\varphi_{xt}=\frac{\partial P}{\partial\varphi}\varphi_t+\frac{\partial P}{\partial z}z_t+\frac{\partial P}{\partial z_x}z_{xt}+\frac{\partial P}{\partial z_t}z_{tt},$$

$$\varphi_{tx}=\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\varphi_x+\frac{\partial Q}{\partial z}z_x+\frac{\partial Q}{\partial z_x}z_{xx}+\frac{\partial Q}{\partial z_t}z_{tx},$$

显然，在 φ_{xt} 的表达式中含 z_{tt} 而不含 z_{xx}，在 φ_{tx} 的表达式中含 z_{xx} 而不含 z_{tt}，而 z，z_x，z_t，z_{xx}，z_{xt}，z_{tt} 又都是彼此相互独立的，所以由可积条件 $\varphi_{xt}=\varphi_{tx}$ 可知，$\frac{\partial P}{\partial z_t}\equiv 0$，$\frac{\partial Q}{\partial z_x}\equiv 0$，从而 $\begin{cases}\varphi_x=P(\varphi, z, z_x)\\ \varphi_t=Q(\varphi, z, z_t)\end{cases}$，也即

$$\frac{\partial P}{\partial\varphi}Q+\frac{\partial P}{\partial z}z_t=G(\varphi) \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi}P+\frac{\partial Q}{\partial z}z_x=G(\varphi) \tag{4}$$

（3）式两边求 $\frac{\partial^2}{\partial z_t^2}$，可得 $\frac{\partial^2 Q}{\partial z_t^2}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\equiv 0$，而由于 $\frac{\partial P}{\partial\varphi}\neq 0$，则 $\frac{\partial^2 Q}{\partial z_t^2}\equiv 0$，由此可知 Q 关于 z_t 是线性的，即

$$Q(\varphi, z, z_t)=q_0(\varphi, z)+q(\varphi, z)z_t \tag{5}$$

其中 q_0，q 都是 φ，z 的光滑函数。同理

$$P(\varphi, z, z_x)=p_0(\varphi, z)+p(\varphi, z)z_x \tag{6}$$

其中 p_0，p 也都是 φ，z 的光滑函数。

把（5）式和（6）式代入（3）式和（4）式并整理得，

$$\left[q_0\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}-G(\varphi)\right]+\left(q_0\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)z_x+\left(q\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)z_t+\left(q\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\frac{\partial p}{\partial z}\right)z_x z_t\equiv 0,$$

$$\left[p_0\frac{\partial q_0}{\partial\varphi}-G(\varphi)\right]+\left(p_0\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right)z_t+\left(p\frac{\partial q_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial q_0}{\partial z}\right)z_x+\left(p\frac{\partial q}{\partial\varphi}+\frac{\partial q}{\partial z}\right)z_x z_t\equiv 0,$$

要使得上两式同时成立，函数 p_0，p，q_0，q 必须同时满足下列 8 个方程：

$$q_0\frac{\partial p}{\partial\varphi}\equiv 0 \tag{7}$$

$$p_0\frac{\partial q}{\partial\varphi}\equiv 0 \tag{8}$$

$$q\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\frac{\partial p}{\partial z}\equiv 0 \tag{9}$$

$$p\frac{\partial q}{\partial\varphi}+\frac{\partial q}{\partial z}\equiv 0 \tag{10}$$

$$q\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial p_0}{\partial z}\equiv 0 \tag{11}$$

$$p\frac{\partial q_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial q_0}{\partial z}\equiv 0 \tag{12}$$

$$q_0\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}-G(\varphi)\equiv 0 \tag{13}$$

$$p_0\frac{\partial q_0}{\partial\varphi}-G(\varphi)\equiv 0 \tag{14}$$

首先，$q_0\neq 0$，否则，由（13）和（14）两式得到 $G(\varphi)\equiv 0$，这与 G 的非线性性矛盾。再由（7）式和（9）式可知 $\frac{\partial p}{\partial\varphi}\equiv\frac{\partial p}{\partial z}\equiv 0$，这样 p 是常值函数，设 $p\equiv\bar{p}$。同理可知，$p_0\neq 0$，且 q 也是常量 $q\equiv\bar{q}$。

定理 1：$\bar{p}\neq 0$，$\bar{q}\neq 0$，$\bar{p}+\bar{q}=0$。

证明：首先用反证法证明 $\bar{p}\neq\bar{q}$。假设 $\bar{p}=\bar{q}$，则 $\bar{q}\neq 0$。再由（13）和（14）两式可得 $q_0\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}=p_0\frac{\partial q_0}{\partial\varphi}$，上式两边同时对 φ 积分得 $q_0=A(z)p_0$，其中 $A(z)$ 为不恒等于零的光滑函数。则由（12）式得 $A(z)\bar{p}\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}+A'(z)p_0+A(z)\frac{\partial p_0}{\partial z}\equiv 0$，再由（11）式可知 $A'(z)p_0\equiv 0$，而 p_0 不能恒等于零，所以 $A'(z)\equiv 0$，即 $A(z)\equiv\bar{A}$（$\bar{A}$ 为常数）。定义新的参数 $v=\varphi-\bar{q}z$，$u=\varphi+\bar{q}z$，即 $\varphi=\frac{1}{2}(u+v)$，$z=\frac{1}{2\bar{q}}(u-v)$，则

$$\frac{\partial p_0}{\partial u}=\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial p_0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2\bar{q}}\left(\bar{q}\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial p_0}{\partial z}\right)\equiv$$

0，即 $p_0=\bar{p}_0(v)$，且 $q_0=\bar{A}p_0(v)$，代入（14）式，两边求 $\frac{\partial}{\partial u}$ 得到 $\frac{1}{2}G'(\varphi)\equiv 0$，这与 G 的非线性性矛盾，所以假设 $\bar{q}=\bar{p}$ 不成立。

其次用反证法证明 $\bar{p}\neq 0$，假设 $\bar{p}=0$，则由（12）式有 $\frac{\partial q_0}{\partial z}\equiv 0$，即 $q_0=\bar{q}_0(\varphi)$。又 $\bar{q}\neq\bar{p}$，所以 $\bar{q}\neq 0$，由此得到 $\frac{\partial p_0}{\partial z}$ 不能恒等于零，进一步由（11）式可知，$p_0=\bar{p}_0(\varphi-\bar{q}z)$，代入（14）式得到 $p_0=\frac{G(\varphi)}{\frac{\partial q_0(\varphi)}{\partial\varphi}}$ 矛盾，于是假设 $\bar{p}=0$ 不成立。同理可证 $\bar{q}\neq 0$。

最后证明 $\bar{p}+\bar{q}=0$，定义新的参数

$$u=\varphi-\bar{p}z,\quad v=\varphi-\bar{q}z \tag{15}$$

$$z=\frac{u-v}{\bar{q}-\bar{p}},\quad \varphi=\frac{\bar{q}u-\bar{p}v}{\bar{q}-\bar{p}} \tag{16}$$

则由（11）式和（12）式可得

$p_0=\bar{p}_0(v)$，$q_0=\bar{q}_0(u)$，

将（13）式改写成

$$\bar{q}_0(u)\bar{p}'_0(v)=G(\varphi) \tag{17}$$

两边求 $\frac{\partial}{\partial u}$ 得到

$$\bar{q}'_0(u)\bar{p}'_0(v)=G'(\varphi)\frac{\bar{q}}{\bar{q}-\bar{p}} \tag{18}$$

将（14）式改写为

$$\bar{p}_0(v)\bar{q}'_0(u)=G(\varphi) \tag{19}$$

两边求 $\frac{\partial}{\partial v}$ 得

$$\bar{q}'_0(u)\bar{p}'_0(v)=G'(\varphi)\frac{-\bar{p}}{\bar{q}-\bar{p}} \tag{20}$$

由（18）和（20）两式得到 $\bar{p}+\bar{q}\equiv 0$，定理 1 证毕。

设常数 $\bar{q}=c$，则 $\bar{p}=-c$，此时（15）和（16）两式分别成为

$$u=\varphi+cz,\quad v=\varphi-cz \tag{21}$$

$$\varphi=\frac{u+v}{2},\quad z=\frac{u-v}{2c} \tag{22}$$

而（17）式和（19）式分别成为

$$\bar{q}_0(u)\bar{p}'_0(v)=G\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{23}$$

$$\bar{p}_0(v)\bar{q}'_0(u)=G\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{24}$$

（23）式两边对 u 求导后再乘以 $\bar{p}_0(v)$ 得到

$$\bar{p}_0(v)\bar{q}'_0(u)=\frac{\bar{p}_0(v)}{2\bar{p}'_0(v)}G'\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{25}$$

与（24）式比较可得

$$\frac{\bar{p}_0(v)}{2\bar{p}'_0(v)}=\frac{G\left(\frac{u+v}{2}\right)}{G'\left(\frac{u+v}{2}\right)} \tag{26}$$

（26）式两边对 u 求导，可得 $(G'(\varphi))^2-G(\varphi)G''(\varphi)=0$，解上述常微分方程得 $G(\varphi)=c_1e^{c_0\varphi}$，$c_0$ 与 c_1 均为不等于零的常数。则由（23）式得，$\bar{q}_0(u)\bar{p}'_0(v)=c_1e^{\frac{c_0}{2}(u+v)}$，两边对 v 积分得 $\bar{q}_0(u)\bar{p}_0(v)=\frac{2c_1}{c_0}e^{\frac{c_0u}{2}}e^{\frac{c_0v}{2}}$，则

$$\begin{cases}p_0(\varphi,z)=e^{\frac{c_0}{2}(\varphi-cz)}\\ q_0(\varphi,z)=\frac{2c_1}{c_0}e^{\frac{c_0}{2}(\varphi+cz)}\end{cases}$$

c，c_0 与 c_1 均为不等于零的常数。

2 结　论

对于波动方程 $z_{xt}=0$ 与二阶非线性偏微分方程 $\varphi_{xt}=G(\varphi)$，若存在由可积系统 $\begin{cases}\varphi_x=P(\varphi,z,z_x,z_t)\\ \varphi_t=Q(\varphi,z,z_x,z_t)\end{cases}$ 定义的 Bäcklund 变换 $z\to\varphi$，则在这种情况下函数 G 只能是指数函数 $G(\varphi)=c_1e^{c_0\varphi}$ 的形式，同时可积系统为

$$\begin{cases}\varphi_x=e^{\frac{c_0}{2}(\varphi-cz)}-cz_x\\ \varphi_t=\frac{2c_1}{c_0}e^{\frac{c_0}{2}(\varphi+cz)}+cz_t\end{cases}$$

式中：e＝2 718 28…，c，c_0，c_1 均为非零常数。

参考文献：

[1] 李翊神．孤子与可积系统[M]．上海：上海科技教育出版社，1999.

[2] McLaughlin D W，Scott A C．A restricted B!?cklund transformation [J]．Journal of Mathematical Physics，1973，14：1 817－1 828.

[3] Demskoi D．On application of Liouville type equations to constructing Bäcklund transformations [J]．Journal of Nonlinear Mathematical Physics，2007，14：147－156.

[4] Vekslerchik V E．Implementation of the B!?cklund transformations for the Ablowitz－Ladik hierarchy [J]．Journal of Physics A，2006，39：6 933－6 953.

[5] Cao X F，Wu H Y，Xu C Y．On miura transformations among nonlinear partial differential equations [J]．Journal of Mathematical Physics，2006，47：083 515.