

文章编号: 1673—9620 (2008) 03—0065—04

一个电路模型的动力学突变行为^{*}

巢小刚

(江苏工业学院 数理学院, 江苏 常州 213164)

摘要: 研究一个带耗散性元件的过电压保护电路模型。它由一个保守映象和一个耗散映象耦合而成的分段光滑映象描述。数值研究表明, 在一定的参数组合下, 系统由规则的周期运动向混沌运动突变, 突变后的系统动力学行为由一个具有分数维的混沌类吸引子主宰。

关键词: 分段光滑; 周期运动; 混沌类吸引子; 分数维

中图分类号: O 322

文献标识码: A

Sudden Change of Dynamics Behavior in Circuit Model

CHAO Xiao—gang

(School of Mathematics and Physics, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China)

Abstract: The thesis reports a relaxation and oscillation circuit with over—voltage protection and a dissipative unit, which is described by a piecewise—continuous concatenation of a dissipative map and a conservative map. With a certain group of parameters the system transits suddenly from periodic motion to chaotic motion, then dynamics behavior of the system is dominated by a chaotic quasi— attractor which owns fractal dimation.

Key words: piecewise smooth; periodic motion; chaotic quasi— attractor; fractal dimension

分段光滑数学模型描述的系统包含频繁突变行为或量变—质变行为, 这类现象普遍存在于各个科学领域, 例如含有电容充放电的电路、材料的断裂、振子物体受到冲击等。对这类分段光滑系统的动力学行为研究有相当重要的意义, 近年来也引起了广泛关注^[1~4]。本文研究了一个由分段光滑映象描述的电路模型的动力学行为, 研究结果将对更清楚地了解二阶数字滤波器等电路、继电器控制电路、脉冲调制系统等非线性电路起到一定的作用。

1 系 统

本文讨论的系统是一个电路模型。图 1 是它的

示意图, 其中 I_1 , I_2 为电流源, 且 $I_1 \gg I_2$, K_1 , K_2 , K_3 为可控电子开关。当 K_1 闭合, K_2 , K_3 断开时, I_1 对电容 C 快速充电。当电容两端的电压 U_c 上升到某一上阈值, 且 U_c 不超过一个常量 E 时, K_1 断开, K_2 闭合, K_3 接通 I_2 , 使电容通过 I_2 放电; 如果 U_c 超过 E , 强迫它取 E 值进行电压保护且 K_3 接通电阻 R , 使电容通过电阻缓慢放电。当 U_c 下降到某个下阈值时, K_1 闭合, K_2 , K_3 断开, 电容又从放电状态转入充电状态。如此不断反复地进行张弛振荡。图 2 显示了加在图 1 中电容上的电压在一个正弦调制的上阈值和一个受到上阈值上一次“触发”时刻的相位调制的下阈值之间所作

^{*} 收稿日期: 2008—03—27

作者简介: 巢小刚 (1977—), 男, 江苏常州人, 硕士, 主要从事非线性动力学方面的研究。

的张弛振荡, 图 2 中纵坐标为电压, 单位 V, 横坐标为相位 X , 单位 rad, 如该图所示上阈值电压可表示为:

$$\begin{cases} U_n = U_{\max} + U_0 \sin 2\pi x_n & x_n \notin F \\ U_n = U_{\max} + cU_0 & x_n \in F \end{cases}$$

其中 x_n 是对应于上阈值调节信号在从电容充电突然转入放电“触发”位置的相位。 U_{\max} 、 U_0 是常量。 $F = [x^{F1}, x^{F2}] =$

$[0.5 + \frac{\arcsin(c)}{2\pi}, 1 - \frac{\arcsin(c)}{2\pi}]$ 为电压保护区, 参数 c 满足 $0 < c < 1$ 。同时如图 2 所示相位 x_n 对下阈值的调节满足:

$$U_{\min}(y_n) = U_{\max} - aU_0 - by_nU_0$$

其中 y_n 满足下列关系:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) & x_n \notin F \\ y_{n+1} = y_n + \frac{4\pi}{bU_0} & x_n \in F \end{cases}$$

参数 a 、 b 分别满足 $a > 1$ 和 $b > 1$, $y_0 \in [0, 1]$, $y_1 \in [0, 1]$ 。当 $y_n = 0$ 时, $U_{\min} = U_{\max} - aU_0$, $y_n = 1$ 时, $U_{\min} = U_{\max} - aU_0 - bU_0$ 。从图 2 中可以看出下阈值限制在 $(U_{\max} - aU_0, U_{\max} - aU_0 - bU_0)$ 之间, 并且 $y_n \in [0, 1]$ 。

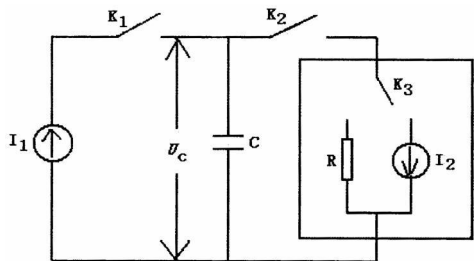


图 1 具有过电压保护功能的张弛振荡电路

Fig 1 The relaxation and oscillation circuit

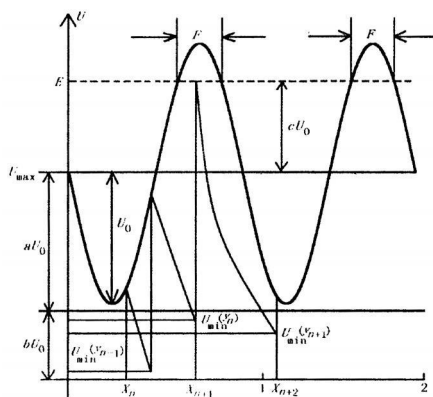


图 2 图 1 所示电路的张弛振荡

Fig 2 The relaxation and oscillation of circuit as shown in Fig 1

从基本的电路定理可以得出如下关系:

$$C [U_c(x_n) - U_{\min}(y_n)] = I_2 \frac{2\pi(x_{n+1} - x_n)}{\omega}$$

其中 C 是电容的大小, ω 是上阈值调制信号的频率。当 $x_n \notin F$ 时, 取 $\frac{C\omega}{I_2} = 1$, $\frac{bU_0}{2\pi} = 1$, 可得到映射:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{1x} = x_n + y_{n+1} + \frac{a}{b} \\ y_{n+1} = g_{1y} = y_n - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad [\text{mod } 1] \quad (1)$$

当 $x_n \in F$ 时, 电路通过电阻 R 放电, 用类似的方法可以得到:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{2x} = x_n + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+cd}{1-ad-bdy_n} \\ y_{n+1} = g_{2y} = y_n + 2x_n \end{cases} \quad [\text{mod } 1] \quad (2)$$

其中 $d = \frac{U_0}{U_{\max}}$, $[\text{mod } 1]$ 表示 x_{n+1} , y_{n+1} 对 1 进行取模操作。本文所讨论的参数为 $a = 2.0$, $b = 1.27$, $d = 0.12$, c 为控制参数。在本文的参数条件下, 映象 (1) 的雅可比矩阵行列式的值为 1, 因此它是一个保守映象, 而映象 (2) 的雅可比矩阵行列式的值小于 1, 因而是一个耗散映象。因此本文所讨论的电路模型是由一个保守映象和一个耗散映象耦合而成的分段光滑映象来描述。

2 映象 (1) 的二周期轨道

设 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 是映象 (1) 的二周期轨道, 则它们满足:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + y_2 + \frac{a}{b} + m_1 \\ y_2 = y_1 - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_1) \\ x_1 = x_2 + y_1 + \frac{a}{b} + m_2 \\ y_1 = y_2 - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_2) \end{cases} \quad (3)$$

其中 m_1 和 m_2 是整数。从方程 (3) 可以得出 x_1 和 x_2 之间有两种可能的关系, 分别为 $x_1 = -x_2$ 和 $x_1 = 0.5 - x_2$ 。仅讨论第一种情况, 此时二周期轨道满足下列关系:

$$\begin{cases} 4x_1 = \frac{1}{b} \sin(2\pi x_1) + m_2 - m_1 \\ x_2 = -x_1 \\ y_1 = 2x_1 - \frac{a}{b} - m_2 \\ y_2 = -2x_1 - \frac{a}{b} - m_1 \end{cases} \quad (4)$$

考虑 $m_1 = m_2$ 的情况, 可以得到当参数 b 满足 $0 < \frac{2\pi}{b} \cos(2\pi x_1) < 4$, 即 $1 < b < \frac{\pi}{2}$ 时, 它是椭圆轨道。

3 系统的高阶周期椭圆岛轨道

设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 是系统的 n 阶周期椭圆岛轨道, 由于映象 (2) 为传统耗散映象, 所以 n 阶周期椭圆岛轨道不可能跨越边界经过电压保护区, 所以该周期轨道的迭代由如下方程组描述:

$$\begin{cases} x_2 = g_{1x}(x_1, y_1) \\ y_2 = g_{1y}(x_1, y_1) \\ x_3 = g_{1x}(x_2, y_2) \\ y_3 = g_{1y}(x_2, y_2) \\ \dots \\ x_n = g_{1x}(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = g_{1y}(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ x_1 = g_{1x}(x_n, y_n) \\ y_1 = g_{1y}(x_n, y_n) \end{cases} \quad (5)$$

方程组 (5) 表示的是 n 阶周期椭圆岛轨道, 即由周期点 (x_1, y_1) 出发在非电压保护区迭代 n 步后返回 (x_1, y_1) 。该周期轨道的稳定条件为:

$$|\text{Tr} \prod_{i=1}^n J_1(x_i, y_i)| < 2 \quad (6)$$

其中 $J_1(x_i, y_i)$ 为映象 (1) 在周期点 (x_i, y_i) 处的雅可比矩阵。由于映象 (1) 的复杂性, 从方程组 (5) 解析出高阶周期椭圆岛轨道的表达式是困难的。然而数值研究表明稳定的高阶周期椭圆岛轨道确实存在, 而且满足 (6) 式。

4 系统的规则周期运动

由上述的解析讨论得, 当 $1 < b < \frac{\pi}{2}$ 时, 系统存在稳定的二周期轨道。在本文所取的参数条件下由 (4) 式可得系统的二周期椭圆点为 $(0.1759, 0.7770)$, $(0.8241, 0.0734)$ 。图 3 显示了 $c = 0.99$ 时系统的相平面轨道。计算方法是: 在 $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ 范围内均匀选取 100×100 个初值, 从每个初值出发迭代 $100\,000$ 次, 记录最后 500 次迭代。从图 3 中可以看到, 除了二周期轨道 (在图中用 A 标识) 外, 还有一个 6 周期椭圆岛轨道 (用 B 标识), 其中 1 个椭圆岛的放大如图 4 所示。随着控制参数 c 的减小, 电压保护区变宽, 其右边界不断与二周期轨道中的其中一个椭圆

岛的外环相碰, 二周期椭圆岛不断变小。当 c 减小到 0.8936 时, 电压保护区的右边界为 $x_{F2} = 0.8241$, 与椭圆点 $(0.8241, 0.0734)$ 相碰, 二周期轨道消失, 此时系统的相平面上只剩下一个 6 周期椭圆岛轨道。随着参数的进一步减小, 电压保护区的右边界不断与 6 周期椭圆岛轨道中的一个椭圆岛相碰, 6 周期椭圆岛轨道不断变小, 图 5 显示了 $c = 0.84$ 时, 系统的相平面轨道。计算方法是: 在 $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ 范围内均匀选取 100×100 个初值, 从每个初值出发迭代 $10\,000\,000$ 次, 记录最后 500 次迭代。此时 6 周期轨道中的椭圆岛已经被边界碰得很小, 大量的数值研究表明, 当 $c = c_0 \approx 0.8376$ 时, 右边界与图 5 中所示的 6 周期椭圆岛轨道中的一个椭圆点相碰, 6 周期轨道消失。而后的相平面由一个混沌类吸引子主宰。由以上讨论得: 当 $0.8376 \leq c < 1$ 时, 系统的相平面由规则运动主宰。

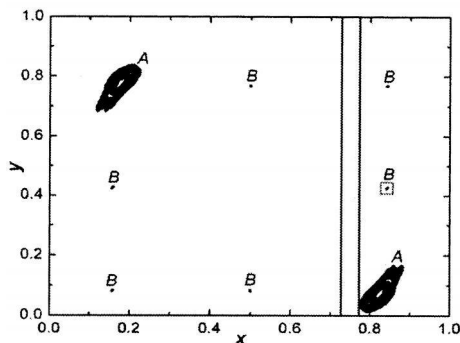


图 3 $c = 0.99$ 时系统的相平面

Fig 3 The phase plane of system when $c = 0.99$

5 系统的混沌类吸引子

图 6 显示了 $c = 0.8375$ 时系统的混沌类吸引子。计算方法是: 在 $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ 范围内均匀选取 10×10 个初值, 从每个初值出发迭代 $10\,000\,000$ 次, 记录最后 $10\,000$ 次迭代。Mira Christian 曾解析证明: 像 (1, 2) 这样的二维分段光滑映象系统中的混沌运动将位于不连续边界各阶象所限制的区域中^[5,6]。所以, 在象集构成一个分形时, 混沌运动就位于这个分形上。因而图 6 中所显示的混沌类吸引子是一个具有分数维的分形。图 7 显示了对图 6 中的 5 万个点进行盒子计数法进行分析的结果, 图中 l 为标尺长度, N 为此标度下的计数。图中显示的极好的标度不变性说明图 6 显示的混沌类吸引子确实是一个分形^[7]。拟合的直线的斜率显示了它的豪斯道夫维数为 $D = 1.48 \pm$

0.01。

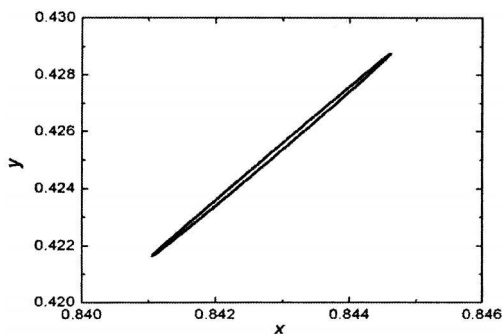


图 4 图 3 中画实线方框椭圆岛的放大

Fig 4 The enlargement of elliptic island in the solid line square as shown in Fig 3

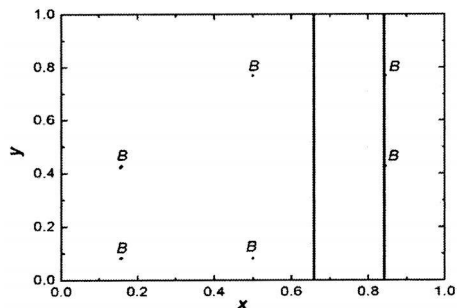


图 5 $c=0.84$ 时系统的相平面

Fig 5 The phase plane of system when $c=0.84$

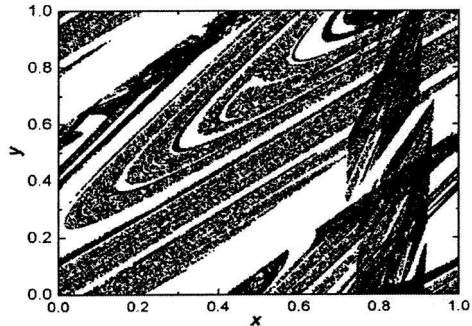


图 6 $c=0.8375$ 时系统的相平面

Fig 6 The phase plane of system when $c=0.8375$

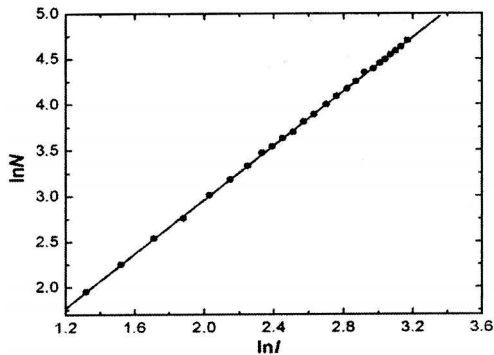


图 7 混沌类吸引子的分数维

Fig 7 Fractal dimension of the chaotic quasi-attractor

6 结 论

本文讨论了一个由分段光滑映象描述的张弛振荡电路模型, 数值结果表明当控制参数到达阈值 $c = \omega \approx 0.8376$ 时, 系统相平面上仅剩的 6 周期椭圆轨道与边界相碰而突然消失, 系统由规则周期运动突然转化为混沌运动, 此时一个具有分数维的混沌类吸引子主宰系统相平面。本文的研究结果有助于更好地了解分段光滑系统的动力学行为。

参考文献:

- [1] DUTTA M, NUSSES H E, OTT E, et al. Multiple attractor bifurcation: a source of unpredictability in piecewise smooth system [J]. Phys Rev Lett, 1999, 83 (21): 4 281—4 284.
- [2] Wang Jian, Ding Xiaoling, Hu Banbi, et al. Characteristics of a piecewise smooth area—perserving map [J]. Phys Rev E, 2001, 64: 1—9.
- [3] Wang X M, Wang Y M, He D R, et al. A quasi—crisis in a quasi—dissipative system [J]. Eur Phys J D, 2002, 19: 119—124.
- [4] Jiang Y M, Lu Y Q, He D R, et al. A crisis of a stochastic web [J]. Eur Phys J D, 2004, 29: 285—292.
- [5] MIRA C. Complex dynamics in two—dimensional endomorphism [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Method & Application, 1980, 4: 1 167—1 187.
- [6] CHRISTIAN M. About two—dimensional piecewise continuous noninvertible maps [J]. Inter J Bifur & Chaos, 1996, 6: 893—918.
- [7] 杨展如. 分形物理学 [M]. 上海: 上海科技出版社, 2001 2—20.