第 20 卷第 4 期
2008 年 12 月

江 苏 工 业 学 院 学 报
JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY

Vol. 20 No. 4
Dec. 2008

文章编号：1673-9620（2008）04-0073-03

一类变异的禽流感模型的定性分析*

周 桦[1]，林支桂[2]

（1. 江苏工业学院 数理学院，江苏 常州 213164）

摘要：考虑具扩散的传染病模型，该模型描述了禽流感在鸟类和人类中的传播，研究相应的具齐次 Neumann 边界条件反应扩散方程组解的渐近性质。结果表明如果染病鸟类的接触率和染病人类的接触率小的话，全系统的无病平衡点是渐近稳定的；但当染病鸟类的接触率大或者和染病人类的接触率大时，变异的禽流感将在人类中扩散。

关键词：反应扩散方程组；禽流感；传染病；稳定性；Lyapunov 泛函

中图分类号：O 175.26　　文献标识码：A

Qualitative Analysis of a Mutant Avian Influenza Model

ZHOU Hua[1]，LIN Zhi-gui[2]

（1. School of Mathematics and Physics，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213164，China）

Abstract: This paper is concerned with an epidemic model with diffusion describing the transmission of avian influenza among birds and humans，and considered the asymptotic behavior of the corresponding reaction-diffusion equations with homogeneous Neumann boundary conditions. The result shows that the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable if the contact rate for the susceptible birds and the contact rate for the susceptible humans are small. But if the contact rate for the susceptible birds or for the susceptible humans is big，mutant avian influenza spreads in the human world.

Key words: reaction-diffusion systems；avian influenza；endemic；stability；Lyapunov functional

近年已有大量的工作[1-5]描述禽流感病毒的传播。本文讨论在 S. Iwami[6]中推广的 SI-SIR 禽类-人类的流感传染模型

$$\begin{cases} X_t - D_1\Delta X = c - bX - \omega XY \\ Y_t - D_1\Delta Y = \omega XY - (b+m)Y \\ S_t - D_2\Delta S = \lambda - \mu S - S(\beta_1 Y + \beta_2 H) \\ B_t - D_2\Delta B = \beta_1 SY - (\mu + d + \varepsilon)B \\ H_t - D_2\Delta H = \beta_2 SH + \varepsilon B - (\mu + \alpha + \gamma)H \\ R_t - D_2\Delta R = \gamma H - \mu R \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t>0$，$x\in\Omega$ 且满足齐次 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial B}{\partial \eta} = \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0,\quad t>0,\quad x\in\partial\Omega \tag{2}$$

和初始条件 $(x\in\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} X(0,x) = \phi_1(x) \geqslant 0,\quad Y(0,x) = \phi_2(x) \geqslant 0 \\ S(0,x) = \phi_3(x) \geqslant 0,\quad B(0,x) = \phi_4(x) \geqslant 0 \\ H(0,x) = \phi_5(x) \geqslant 0,\quad R(0,x) = \phi_6(x) \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中 Ω 是 R^n 中的有界区域，边界 $\partial\Omega$ 光滑，η 为单位外法向量。(1) 式的两个方程是 SI 模型，描述在鸟类之间的相互作用。把鸟分成两类：易感者

* 收稿日期：2008-05-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671172）；江苏省教育厅自然科学基金资助项目（BK2006064）
作者简介：周桦（1971-），女，江苏常州人，硕士，主要从事偏微分方程理论和应用研究。

类(用 X 表示)和已经感染了禽流感的感染者(用 Y 表示)。(1)式中的常数 c 是鸟的净出生率，假定所有个体的自然死亡率都为常数 b，已感染者除正常的死亡外还有因患禽流感而额外的死亡，把这个死亡率记为 m。ωXY 是疾病的发生率，其中 ω 是每次接触禽流感患病个体传染的概率。

(1)式的后 4 个方程是反映人类的 SIR 模型，把人分成 4 类：易感的人类(用 S 表示)，已经感染了禽流感的人类(用 B 表示)，已经感染了变异的禽流感的人类(用 H 表示)和恢复的人类(用 R 表示)。常数 λ 是人类的净出生率，假定人类的自然死亡率都为常数 μ，已感染者除正常的死亡外还有因患禽流感而额外的死亡，把这个死亡率记为 d，因感染了变异禽流感而额外死亡，把这个死亡率记为 α，常数 ε 是禽流感变异的概率，γ 是恢复率。$\beta_1 SY$ 是由患禽流感鸟类引起的疾病的发生率，$\beta_2 SH$ 是由感染了变异的禽流感人类引起的疾病的发生率，其中 β_1 是每次接触禽流感患病个体传染的概率，β_2 是每次接触变异的禽流感患病个体传染的概率。常数 D_1 和 D_2 分别是禽类和人类的扩散系数。齐次 Neumann 边界条件表明上述系统是自我封闭的，在边界上没有禽类或人类的迁移。初始函数 ϕ_i 是非负 Holder 连续的并且在边界上满足相容性条件。

最近考虑相应的常微分方程模型[6]，得到了解的长时间性质。本文在一个有界区域考虑具扩散的禽类-人类流感传染模型，研究相应的反应扩散系统解的渐近性质。

1 禽类系统的局部和全局稳定性

由于前两个方程组成的禽类系统不依赖于人类系统，因此首先研究下述子系统：

$$\begin{cases} X_t - D_1\Delta X = c - bX - \omega XY \\ Y_t - D_1\Delta Y = \omega XY - (b+m)Y \end{cases} \tag{4}$$

易知该系统有一个无病平衡点 $e_0 = (c/b, 0)$，它表明没有感染禽流感的鸟类存在。进一步如果有下述条件成立：

$$r_0 = \frac{c\omega}{b(b+m)} > 1$$

则系统(4)还有一个染病平衡点 $e_+ = (X^*, Y^*)$，其中 $X^* = \dfrac{b+m}{\omega}$ 和 $Y^* = \dfrac{c}{b+m} - \dfrac{b}{\omega}$。这意味着在疾病传播期间，当接触率 ω 足够大的时候，鸟类是容易感染禽流感的。

类似于文献[7]的做法，令 $0 = \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots$，齐次 Neumann 边界条件下算子 $-\Delta$ 在 Ω 上的特征值。令

$$V = \{u = (X, Y) \in [C^1(\overline{\Omega})]^2 \mid \partial_\eta X = \partial_\eta Y = 0,\ x \in \partial\Omega\}$$

V_i 是对应于给定的特征值 μ_i 的 V 的不变子空间。故有 $V = \oplus_{i=1}^{\infty} V_i$。令

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} D_1\Delta & 0 \\ 0 & D_1\Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b-\omega Y^* & -\omega X^* \\ \omega Y^* & \omega X^* - (b+m) \end{pmatrix}$$

则系统(4)的线性化为 $u_t = Lu$。由于 V_i ($i \geqslant 1$)是算子 $\boldsymbol{L}$ 的不变子空间，故 λ 是算子 L 在空间 V_i 的特征值当且仅当 λ 是下述矩阵的特征值：

$$\begin{pmatrix} -D_1\mu_i & 0 \\ 0 & -D_1\mu_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b-\omega Y^* & -\omega X^* \\ \omega Y^* & \omega X^* - (b+m) \end{pmatrix}$$

则相应的特征方程为

$$\varphi_i(\lambda) = (\lambda + \mu_i D_1 + b + \omega Y^*)(\lambda + \mu_i D_i + b + m - \omega^2 X^* Y^* = 0$$

首先考虑无病平衡点 e_0，其特征值为 $-D_1\mu_i - b$ 和 $-D_1\mu_i + c\omega/b - (b+m)$。如果 $r_0 > 1$，有一个正特征值 $\omega c/b - (b+m)$，则 e_0 是不稳定的；若 $r_0 < 1$，则所有的特征值都是负的而且小于一个负常数，故 e_0 是局部渐近稳定的。

接下来考虑另一个平衡点 e_+，其相应的特征方程为

$$\varphi_i(\lambda) = (\lambda + \mu_i D_1)^2 + A(\lambda + \mu_i D_1) + B = 0$$

其中 $A = 2b + m + \omega(Y^* - X^*)$，$B = b(b+m) + b\omega(Y^* - X^*) + m\omega Y^*$。如果 $r_0 > 1$，有 $A > 0$，$B > 0$，因此特征方程的所有根都有负实部，进一步可得所有实部都小于一个负常数。由文献[8]的定理 5.1.1 可知 e_+ 是局部渐近稳定的。

定理 1：如果基本再生数 $r_0 > 1$，则系统(4)的染病平衡点是局部渐近稳定的，此时无病平衡点是不稳定的。相反地，若 $r_0 < 1$，则无病平衡点是局部渐近稳定的。

接下来，考虑系统(4)平衡点的全局渐近性。定义 Lyapunov 函数

$$V(t) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(X - \frac{c}{b}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{c}{b}\int_\Omega Y\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

沿系统(4)的正解对 $V(t)$ 求导可得：

$$\frac{dV(t)}{dt}=-D_1\int_\Omega\left(|\nabla X|^2+\frac{c}{b}|\nabla Y|^2\right)dx-\int_\Omega\left[(b+\omega Y)\left(X-\frac{c}{b}\right)^2+\frac{c}{b}(b+m)(1-r_0)Y\right]dx$$

当 $r_0<1$ 时，故有:

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega\left[|\nabla X|^2+|\nabla Y|^2+\left(X(t,x)-\frac{c}{b}\right)^2+(Y(t,x)-0)^2\right]dx=0 \qquad (6)$$

再利用 Poincare 不等式得

$$\lim_{m\to\infty}\left\|X(\cdot,t_m)-\frac{c}{b}\right\|_{C^2(\bar{\Omega})}=0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\|Y(\cdot,t_m)-0\|_{C^2(\bar{\Omega})}=0$$

下面考虑染病平衡点 e_+ 的全局渐近性。令

$$V(t)=\int_\Omega\left(X-X^*-X^*\ln\frac{X}{X^*}\right)dx+\int_\Omega\left(Y-Y^*-Y^*\ln\frac{Y}{Y^*}\right)dx \qquad (7)$$

对 $V(t)$ 求导可得:

$$\frac{dV(t)}{dt}=\int_\Omega\left[X_t\left(1-\frac{X^*}{X}\right)+Y_t\left(1-\frac{Y^*}{X}\right)\right]dx=-D_1\int_\Omega\left[X^*\frac{|\nabla X|^2}{X^2}+Y^*\frac{|\nabla Y|^2}{Y^2}\right]dx-\frac{c\omega}{b+m}\int_\Omega\frac{(X-X^*)^2}{X}dx\leqslant 0$$

类似地可得下述定理。

定理 2: 若 $r_0<1$，则无病平衡点 e_0 是全局渐近稳定的。相反地，若 $r_0>1$，则染病平衡点 e_+ 是全局渐近稳定的。

2 全系统局部稳定性

系统 (1) 始终有一个无病平衡点 $E_0=(c/b,0,\lambda/\mu,0,0,0)$，它表明没有鸟类感染禽流感，也没有人类感染禽流感。若

$$R_0=\frac{\beta_2\lambda}{\mu(\mu+\alpha+\gamma)}>1,$$

则系统 (1) 有一个平衡点 $E_h=\left(\frac{c}{b},0,S_*,0,H_*,R_*\right)$，其中

$$S_*=\frac{\mu+\alpha+\gamma}{\beta_2},\quad H_*=\frac{\lambda}{\mu+\alpha+\gamma}-\frac{\mu}{\beta_2},\quad R_*=\frac{\gamma}{\mu}H_*,$$

这个平衡点表明人类被变异的禽流感所感染。

若 $r_0>1$，则系统 (1) 有一个正平衡点 $E_+=(X^*,Y^*,S^*,B^*,H^*,R^*)$，其中 X^*，Y^* 如上述所定义，此外

$$S^*=\frac{\lambda}{\mu+\beta_1Y^*+\beta_2H^*},$$

$$B^*=\frac{\beta_1Y^*}{\mu+\alpha+\varepsilon}S^*,\quad R^*=\frac{\gamma}{\mu}H^*,$$

这个平衡点表明不管鸟类被禽流感感染，人类也有被变异的禽流感感染。这里 H^* 是下述方程的唯一正平衡点:

$$\beta_2(\mu+\alpha+\gamma)H^2+\{(\mu+\beta_1Y^*)(\mu+\alpha+\gamma)-\beta_2\gamma\}H-\frac{\varepsilon\beta_1\lambda Y^*}{\mu+d+\varepsilon}=0$$

同上利用对相应线性问题的谱分析的方法得到这 3 个平衡点的局部渐近稳定性。

定理 3: 假设 $r_0<1$ 和 $R_0<1$，则无病平衡点 E_0 是局部稳定的; 若 $r_0<1$，$R_0>1$，则平衡点 E_h 是局部渐近稳定的; 最后若有 $r_0>1$，则染病平衡点 E_+ 是局部渐近稳定的。

结果表明如果染病鸟类的接触率和染病人类的接触率小的话，全系统的无病平衡点是渐近稳定的；但当染病鸟类的接触率大或者和染病人类的接触率大时，变异的禽流感将在人类中扩散，这表明即使染病的人类总数在一个低的程度，我们也并不能高枕无忧。因此预防禽流感大流行爆发的最佳策略是，不仅对患禽流感的鸟类采取措施，杀灭隔离它们，而且当禽流感发生变异时，也要对染上变异禽流感的人类采取控制措施，降低与已经染上变异的禽流感病人的接触率。

参考文献:

[1] Anderson R M, May R M. Population biology of infectious diseases: Part Ⅰ [J]. Nature, 1979, 280: 361-367.

[2] Murray J D. Mathematical Biology Ⅱ [J]. Springer, 2003, [s n].

[3] Ma Z E, Liu J P, Li J. Stability analysis for differential infectivity epidemic models [J]. Nonlinear Anal, 2003, 4: 841-856.

[4] Xiao X, YAO S, SHAO S H. Particular symmetry in RNA sequence of SARS and the origin of SARS coronavirus [J]. Int J Nonlin Sci Numer Simul, 2005, 6: 181-186.

[5] Li G H, Jin Z. Global stability of an SEI epidemic model with general contact rate [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 23: 997-1 004.

[6] Iwami S, Takeuchi Y, Liu X N. Avian-human influenza epidemic model [J]. Math Biosci, 2007, 207: 1-25.

[7] Pang P Y H, Wang M X. Straegy and stationary pattern in a three-species predator-prey model [J]. J Differential Equations, 2004, 200: 245-273.

[8] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.