

文章编号: 2095—0411 (2011) 02—0067—03

一个类耗散系统中的瞬态混沌^{*}

岳 明, 蒋美萍, 沈小明, 巢小刚

(常州大学 数理学院, 江苏 常州 213164)

摘要: 研究了一个具有过电压保护振荡电路中的瞬态混沌, 该电路模型由两个保守映象不可逆耦合而成的分段连续映象描述。首先从新的角度研究了系统的禁区, 用解析的方法得出了系统禁区的边界, 而后用数值方法得出该系统的瞬态混沌就是禁区边界的象集。

关键词: 分段连续; 类耗散; 混沌瞬态; 禁区

中图分类号: O 322

文献标识码: A

A Transient Chaos in a Quasi—Dissipative System

YUE Ming, JIN Yi, SHEN Xiao—ming, CHAO Xiao—gang

(School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: The thesis studied a transient chaos in a relaxation and oscillation circuit with over—voltage protection, which was described by a piecewise—continuous concatenation of two conservative maps. First the forbidden region of the system was studied in new perspective and its border was obtained by analytical method. The numerical studies indicated that the transient chaos was the image set of the border of the forbidden region of the system.

Key words: piecewise continuous; quasis—dissipative; transient chaos; forbidden region

自然界中系统演变的量变—质变规律是普遍的, 例如水滴的形成到下落过程、材料疲劳与断裂等等。这样一类包含量变—质变行为的系统在数学上需要用分段连续模型来描述, 因此近年来分段连续系统的动力学行为引起了广泛关注^[1—6]。

分段连续系统的不可逆性会导致瞬态混沌在系统中的广泛存在^[1—4], 因此对瞬态混沌特性的研究将有助于更加全面地理解系统的动力学行为, 然而到目前为止对瞬态混沌的研究还未见报道。本文研究了一个具有过电压保护的张弛振荡电路模型中的瞬态混沌, 数值研究结果表明瞬态混沌是系统禁区边界的象集。

1 系 统

本文讨论的电路模型如图 1 所示, 其中 I_1 , I_2 为电流源, 且 $i_1 \geq i_2$, K_1 , K_2 为可控电子开关。当 K_1 闭合, K_2 断开时, I_1 对电容 C 快速充电, 当电容两端电压 U_c 上升到由一正弦信号调制的上阈值时, K_1 断开, K_2 闭合, 电容器 C 通过 I_2 缓慢放电, 当 U_c 下降到某下阈值时, K_1 闭合, K_2 断开, 电容器 C 又从放电状态转入充电状态, 如此不断反复地进行张弛振荡。为了避免电压过高,

^{*} 收稿日期: 2010—09—27

基金项目: 常州大学数理基金资助 (ZMF09020024)

作者简介: 岳明 (1987—), 男, 安徽凤台人, 硕士生; 通讯联系人: 巢小刚。

进行了电压保护, 即电压超过一个常量 E 后, 都强迫地采用值 E 。该电路模型可以用以下的分段连续映象描述^[7]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{1x} = x_n + y_{n+1} + \frac{a}{b} \\ y_{n+1} &= f_{1y} = y_n - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{aligned} \quad [\text{mod. } 1] \quad x_n \notin F \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{2x} = x_n + y_n + \frac{a+c}{b} \\ y_{n+1} &= f_{2y} = y_n + 2x_n \end{aligned} \quad [\text{mod. } 1] \quad x_n \in F \quad (2)$$

其中 $F = [x_{F1}, x_{F2}] = \left[0.5 + \frac{\arcsin(c)}{2\pi}, 1 - \frac{\arcsin(c)}{2\pi}\right]$ 为电压保护区, 参数 c 满足 $0 < c < 1$ 。映象 (1) 与 (2) 的逆映象为:

$$\begin{aligned} x_n &= f_{1x}^{-1} = x_{n+1} - y_{n+1} - \frac{a}{b} \\ y_n &= f_{1y}^{-1} = y_{n+1} + \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{aligned} \quad [\text{mod. } 1] \quad x_n \notin F \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_n &= f_{2x}^{-1} = -x_{n+1} + y_{n+1} + \frac{a+c}{b} \\ y_n &= f_{2y}^{-1} = y_{n+1} - 2x_n \end{aligned} \quad [\text{mod. } 1] \quad x_n \in F \quad (4)$$

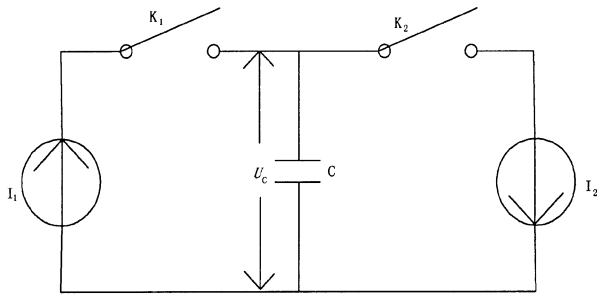


图 1 张弛振荡电路模型

Fig. 1 The model of the relaxation and oscillation circuit

根据逆映象 (3) 与 (4) 选择逆象取决于 x_n 而不是 x_{n+1} , 因此每一个点 (x_{n+1}, y_{n+1}) 可能有两个分别由 (3) 与 (4) 所决定的逆象。这就使得相空间的两个不同区域在迭代过程中塌缩成一个区域, 从而显示某种“类耗散性”, 该系统被称为“类耗散系统”。本文对系统映象 (1) 与 (2) 作了大量的数值研究, 结果表明在相当广泛的参数区域内, 系统的相空间均出现一个瞬态混沌。由于篇幅所限, 本文取 $a=2.00$, $b=1.42$, $c=0.78$ 。

2 系统的禁区

为了给出禁区的边界, 与文献 [2] 与 [7] 研究系统禁区的方法不同, 本文从另一个新的角度来研究禁区。映象 f_1 的禁区 J_1 定义为“其中各点的逆象 $f_1^{-1}(P)$ ($P \in J_1$) 落在 f_2 的定义域内而不存在的相平面区域”; 映象 f_2 的禁区 J_2 定义为“其中各点的逆象 $f_2^{-1}(P)$ ($P \in J_2$) 落在 f_1 的定义域内而不存在的相平面区域”。映象 f_1 的定义域为非电压保护区, 记为 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq x_{F1} \text{ "or" } x_{F2} \leq x \leq 1\}$, 映象 f_2 的定义域为电压保护区, 记为 $F = \{(x, y) \mid x \in [x_{F1}, x_{F2}]\}$, 因而整个系统的禁区 J 可定义如下:

$$\begin{aligned} J &= J_1 \cap J_2 = \\ &= \{(x, y) \mid f_1^{-1}(x, y) \in F \cap \{(x, y) \mid f_2^{-1}(x, y) \in D\}\} \end{aligned} \quad (5)$$

由逆映象方程 (3) 可得 J_1 的边界方程为:

$$x_{F1} \leq (x_{n+1} - y_{n+1} - \frac{a}{b} + m) \leq x_{F2} \quad (m \text{ 为整数, 表示取模操作})$$

由此解得:

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - \frac{a}{b} + m - x_{F2}) &\leq y_{n+1} \leq \\ (x_{n+1} - \frac{a}{b} + m - x_{F1}) &\end{aligned} \quad (6)$$

令 $y_1 = x_{n+1} - \frac{a}{b} + m - x_{F2}$, $y_2 = x_{n+1} - \frac{a}{b} + m - x_{F1}$, 这是两条直线方程且这两条直线平行, 因而映象方程 f_1 的迭代禁区 J_1 被限制在两条平行直线之间的。类似地, 由逆映象方程 (4) 可得 J_2 的边界方程为:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-x_{n+1} + y_{n+1} + \frac{a+c}{b} + m) \leq x_{F1} \text{ 或} \\ x_{F2} &\leq (-x_{n+1} + y_{n+1} + \frac{a+c}{b} + m) \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

由此解得:

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - \frac{a+c}{b} - m) &\leq y_{n+1} \leq \\ (x_{n+1} + x_{F1} - \frac{a+c}{b} - m) &\text{ 或} \\ (x_{n+1} + x_{F2} - \frac{a+c}{b} - m) &\leq y_{n+1} \leq \\ (x_{n+1} + 1 - \frac{a+c}{b} - m) &\end{aligned} \quad (8)$$

即 J_2 也被限制在两条平行直线之间。在所讨

论的参数条件下， J_1 是 J_2 的真子集，即 $J_1 \subset J_2$ ，所以整个系统的禁区 $J = J_1 \cap J_2 = J_1$ ，见图 2。因此直线 $y_1 = x_{n+1} - \frac{a}{b} + m - x_{F2}$ 与 $y_2 = x_{n+1} - \frac{a}{b} + m - x_{F1}$ 构成了禁区的边界。

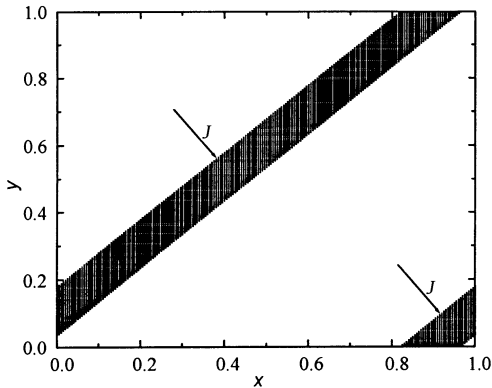


图 2 禁区 J
Fig. 2 The forbidden region J

3 系统的瞬态混沌

图 3 显示了在本文参数条件下的瞬态混沌，该图是在 $x \in [0, 1]$ ， $y \in [0, 1]$ 范围内均匀选取 20×20 个初值，每个初值记录最初的 200 次迭代得到。图 4，图 5 显示了系统禁区边界与的第 1、2、10、100 到 6 000 阶象。图 4 中标注 1 的 4 条直线是禁区边界的第 1 阶象，灰色的曲线和黑色点是禁区边界的第 2 和第 10 阶象这些边界的象集的集合与图 3 中的瞬态混沌粗略地相像。图 5 是禁区边界 100 到 6 000 阶象，它们已经与图 3 中的瞬态混沌非常相像。因此从以上的数值结论得到瞬态混沌是禁区边界的象集。

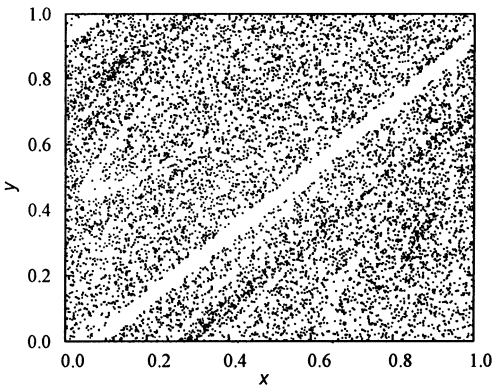


图 3 系统的瞬态混沌
Fig. 3 The transient chaos of the system

4 结 论

本文在一个张弛振荡电路模型中解析了该系统

禁区的边界，而后用数值方法得出系统的瞬态混沌就是禁区边界的象集，首次得出了分段连续系统中的瞬态混沌与禁区边界的关系，这将有助于进一步理解分段连续系统的动力学性质。

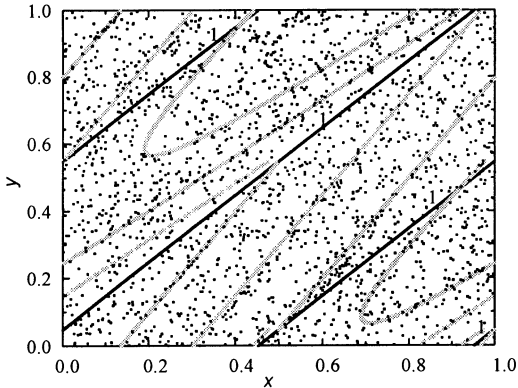


图 4 禁区边界的第 1、2、10 阶象
Fig. 4 The first, second, 10th image of the border of the forbidden region

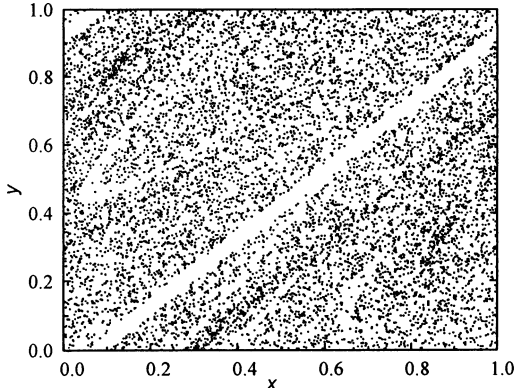


图 5 禁区边界的第 100 到 6 000 阶象
Fig. 5 The 100th to 6 000th image of the border of the forbidden region

参考文献：

[1] Wang X M, Wang Y H, Zhang K, et al. A Quasis-crisis in a quasia-dissipative sysstem [J]. Eur Phys J D, 2002, 19: 119-124.
[2] Jiang Y M, Lu Y Q, He D R, et al. A crisis of a stochastic web [J]. Eur Phys J D, 2004, 29: 285-292.
[3] Shen Y, Dai J, Jiang Y M, et al. A fat fractal crisis in a quasi-dissipative system [J]. Phys Lett A, 2006, 348: 279-283.
[4] Chao X G, Dai J, Wang W X, et al. A semi-dissipative crisis [J]. Eur Phys J D, 2006, 40: 423-430.
[5] Rakshit B, Banerjee S. Existence of chaos in a piecewise smooth two-dimensional contractive map [J]. Phys Lett A, 2009, 373: 2 922-2 926.
[6] Dutta P S, De S, Banerjee S, et al. Torus destruction via global bifurcation in a piecewise-smooth, continuous map with square-root nonlinearity [J]. Phys Lett A, 2009, 373: