

文章编号: 2095—0411 (2012) 02—0073—03

# 一个半耗散系统中的吸引子<sup>\*</sup>

巢小刚, 岳 明, 沈小明

(常州大学 数理学院, 江苏 常州 213164)

**摘要:** 研究了一个由保守子映象和一个耗散子映象不可逆耦合而成的半耗散系统。在这样一个半耗散系统中, 系统长时间、大范围的动力学行为由“混合耗散性”支配, 数值计算表明该系统的动力学行为具有以下 2 个特征: 耗散吸引子与规则吸引子共存; “混合耗散性”作用导致了耗散吸引子与规则吸引子的产生。

**关键词:** 半耗散系统; 耗散吸引子; 规则吸引子; 混合耗散性

**中图分类号:** O 322

**文献标识码:** A

## Regular Attractors in a Semi—Dissipative System

CHAO Xiao—gang, YUE Ming, SHEN Xiao—ming

( School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** The thesis studies a semi—dissipative system which is an irreversible concatenation of a conservative map and a dissipative map. In such a semi—dissipative system, its dynamic behavior is determined by the mixed dissipative properties in a long time or large ranges. Our numerical calculation shows that the dynamic behavior of the system has the following two features: the coexistence of dissipative attractors and regular attractors; the mixed dissipative properties leading to the generation of dissipative attractors and regular attractors.

**Key words:** semi—dissipative systems; dissipative attractors; regular attractors; the mixed dissipative properties

由于摩擦、热传导等宏观耗散机制的存在, 以及系统与环境之间的能量交换, 耗散系统在自然界中广泛存在。吸引子的存在是耗散系统的重要动力学特征之一。在传统耗散系统中, 传统耗散性引起的相空间体积随时间的指数塌缩<sup>[1]</sup>, 使得相空间中一个有限区域中的初值无限地趋近于一个测度为零的点吸引子, 即耗散吸引子轨道<sup>[1—4]</sup>。

2001 年, 一种被称为“类耗散性”的弱耗散机制受到了人们的广泛关注<sup>[5]</sup>。这种弱耗散性发生在由 2 个保守子映象不可逆耦合而成的类耗散系统

中, 由于系统的不可逆, 即 1 个相点可能存在 2 个逆象, 2 个相空间体积元有可能在动力学过程中合为 1 个, 从而引起系统相空间随时间的线性塌缩<sup>[6]</sup>。这种弱耗散性—类耗散性可以导致测度不为零的规则吸引子 (通常是一个“椭圆岛”或“椭圆岛链”) 的出现<sup>[5—7]</sup>。

本文研究了一个由保守子映象和耗散子映象不可逆耦合而成的半耗散系统, 在这样一个半耗散系统中, 既可以展示由系统不可逆性带来的弱耗散性

\* 收稿日期: 2012—04—25

基金项目: 常州大学数理基金资助 (ZMF09020024)

作者简介: 巢小刚 (1977—), 男, 江苏常州人, 硕士, 副教授, 研究方向为非线性动力学。

一类耗散性, 也可展示由耗散子映象带来的强耗散性—传统耗散性, 以及两者共同作用导致的“混合耗散性”, 数值计算表明系统大范围、长时间的动力学行为由系统的“混合耗散性”支配, 这使得半耗散系统的动力学行为具有以下 2 个鲜明特征: ①在一定参数条件下, 系统的相平面由规则吸引子与耗散吸引子共同支配, 这是半耗散系统的重要动力学特征; ②半耗散系统中的耗散吸引子与规则吸引子由“混合耗散性”作用而产生, 这不同于传统耗散系统中的耗散吸引子的形成机制, 也不同于类耗散系统中的规则吸引子的形成机制。

## 1 模 型

图 1 是一个带有耗散性元件的过电压保护电路模型。电流源  $I_1$ 、 $I_2$  与电阻  $R$  并联在电容器  $C$  的两端, 且  $I_1 \gg I_2$ 。图中  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  为可控电子开关,  $U_c$  表示电容  $C$  两端的电压。

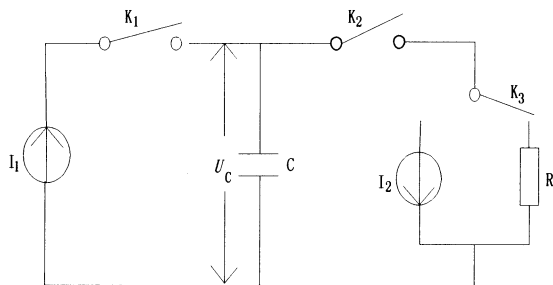


图 1 具有过电压保护的电路

Fig. 1 The circuit with over voltage protection

当  $K_1$  闭合,  $K_2$ 、 $K_3$  断开, 电流源  $I_1$  对电容  $C$  充电,  $U_c$  增大, 当  $U_c$  达到某上阈值且不超过某常量  $E$  时,  $K_1$  断开,  $K_2$  合上,  $K_3$  接通电流源  $I_2$  放电; 若  $U_c$  超过  $E$  值, 则强迫  $U_c$  取  $E$  值,  $K_3$  接通电阻  $R$  缓慢放电。当  $U_c$  达到某下阈值时,  $K_1$  合上,  $K_2$ 、 $K_3$  断开, 电容  $C$  再回到充电状态。如此不停反复地对电容  $C$  进行充电与放电。该电路模型的动力学行为可由一个分段光滑映象描述<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{1x} = x_n + y_{n+1} + \frac{a}{b} \\ y_{n+1} = g_{1y} = y_n - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad [\text{mod. } 1] \quad x_n \notin F \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{2x} = x_n + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+cd}{1-ab-bdy_n} \\ y_{n+1} = g_{2y} = y_n + 2x_n \end{cases} \quad [\text{mod. } 1] \quad x_n \in F \quad (2)$$

映象方程 (1) 与 (2) 的 Jacobian 矩阵为:

$$J_1 = \frac{\partial (x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial (x_n, y_n)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\pi}{b} \cos(2\pi x_n) & 1 \\ -\frac{2\pi}{b} \cos(2\pi x_n) & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$J_2 = \frac{\partial (x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial (x_n, y_n)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{bd}{2\pi(1-ad-bdy_n)} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

在本文讨论中取  $a = 2.00$ ,  $b = 1.35$ ,  $c = 0.99$ ,  $d = 0.20$ 。由 (3) 式与 (4) 式可得:  $\det J_1 = 1$ 、 $\det J_2 < 1$ , 因而映象 (1) 与 (2) 分别是保守映象与耗散映象。映象 (1) 与 (2) 的逆映象分别为:

$$\begin{cases} x_n = g_{1x}^{-1} = x_{n+1} - y_{n+1} - \frac{a}{b} \\ y_n = g_{1y}^{-1} = y_{n+1} + \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad x_n \notin F \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_n = g_{2x}^{-1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{2} \\ y_n = g_{2y}^{-1} = y_{n+1} - 2x_{n+1} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+cd}{(1-ad-bdy_n)} \end{cases} \quad x_n \in F \quad (6)$$

映象方程 (1) 与 (2) 构成的分段光滑系统被称为半耗散系统<sup>[8]</sup>。混合耗散性是半耗散系统特有的耗散类型, 它将导致半耗散系统具有与传统耗散系统和类耗散系统不同的特征动力学行为。

## 2 半耗散系统的相平面

图 2 显示了在本文参数条件下的系统相平面,

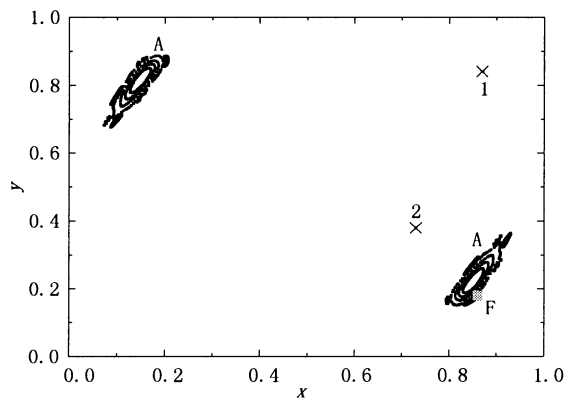


图 2 系统的相图

Fig. 2 The phase plane of the system

该图的画法是: 在  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$  的相平面范围内均匀选取  $10 \times 10$  个初值, 每个初始值迭代 50 000 步, 去掉前 49 000 步迭代, 保存最

后 1 000 步迭代数据。图中标注 1、2 的叉号表示 2 个耗散点吸引子，它们构成 1 个二周期轨道，A 表示规则吸引子，它们是周期椭圆岛，此时耗散吸引子和规则吸引子共存于系统的相平面内，这与传统耗散系统的相平面内仅有周期耗散吸引子不同，也与类耗散系统的相平面内仅有规则吸引子不同。

### 3 半耗散系统中吸引子的形成机制

对于不同类型的耗散性，可引入物理量“相点密度  $\langle S \rangle$ ”来描述<sup>[1]</sup>。以二维相平面为例，取一块很小很小的相平面区域，在该区域内均匀选取  $m$  个点 ( $m > 3\ 000$ )，它们两两间的平均距离可定义为该相平面区域的相点密度（简称相点密度），即

$$\langle S \rangle = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m S_{ij}}{m(m-1)} \quad (i \neq j) \quad (7)$$

式中  $S_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ ，若相点密度  $\langle S \rangle$  不断增大，则表示所选取的相平面区域在迭代过程中不断扩张，反之则表示所选取的相平面区域在迭代过程中不断塌缩。

在椭圆岛上任意选取一块很小很小的相平面区域（以下简称“相区”） $F = \{ (x, y) \mid x \in [0.860\ 2, 0.860\ 6], y \in [0.179\ 2, 0.179\ 6] \}$ （图 2 中用灰色点表示），在相区  $F$  内均匀选取  $100 \times 100$  个点，这些点的各阶逆象点通过逆映象（5）与（6）计算，由于系统是不可逆的，所以从相区  $F$  的某一阶逆象区出发的迭代可以通过多条路径到达  $F$ 。数值计算了同一条路径上相区  $F$  的各阶逆象区的相点密度  $\langle S_N \rangle$  随逆象阶数  $N$  的变化关系，计算结果如图 3 所示。图中 3 条围绕直线  $L_1$  振荡的路径上的相点密度  $\langle S \rangle$  在迭代过程中大致保持恒定，但在 1、2 处发生了两块相区塌缩成一块相区，这正是系统不可逆性导致的类耗散性，因而在这 3 条通向椭圆岛的迭代路径上，类耗散性导致了相平面的塌缩。在 3 条围绕直线  $L_2$  振荡的通向椭圆岛的迭代路径上，相点密度  $\langle S \rangle$  与逆象阶数  $N$  的变化关系为： $N \propto \langle S \rangle^\tau$ ， $\tau = 2.8 \pm 0.1$ ，这正是系统的传统耗散性，因而在这 3 条通向椭圆岛的迭代路径上，传统耗散性导致了相平面的塌缩。图 3 的计算结果表明，在半耗散系统中，规则吸引子—椭圆岛的形成是类耗散性与传统耗散性共同作用的结果，即混合耗散性导致半耗散系统中规则吸引子的产生。若在图 2 中的耗散吸引子 1 或 2

附近任意选取一块很小很小的相区，计算相点密度  $\langle S \rangle$  随逆象阶数  $N$  的变化关系，得到的结果与图 3 完全定性一致，所以在半耗散系统中，耗散吸引子的形成也是由混合耗散性作用而产生的。

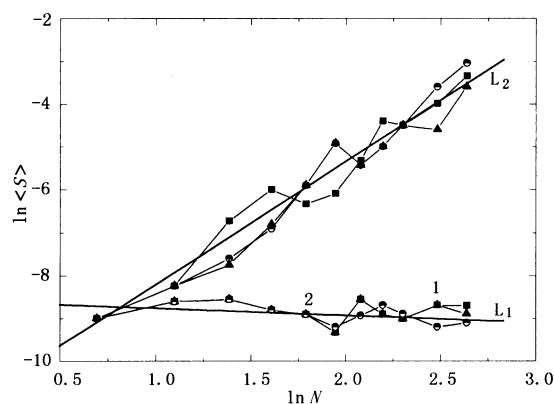


图 3 相点密度  $\langle S \rangle$  与逆象阶数  $N$  的关系

Fig. 3 The relation between the density of phase point  $\langle S \rangle$  and the step times of inverse image  $N$

### 4 结 论

本文研究了一个具有过电压保护的电路模型，该模型的动力学行为由一个保守子映象与一个耗散子映象不可逆耦合而成的分段光滑映象描述。在这样一个半耗散系统中，规则吸引子与耗散吸引子共存于系统相平面内，而半耗散系统特有的耗散类型——混合耗散性导致了规则吸引子与耗散吸引子的形成。本文所得到的计算结果将有助于人们全面理解不同类型耗散系统的动力学性质。

### 参考文献：

- [1] 巢小刚. 传统耗散性的动力学特性描述 [J]. 江苏工业学院学报, 2009, 21 (4): 9–11.
- [2] Boon Leong Lan, Clarence Yapp. Dissipative relativistic standard map: Periodic attractors and basin of attraction [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37: 1300–1304.
- [3] Mitsuhiro Nakao. An attractor for a nonlinear dissipative wave equation of Kirchhoff type [J]. J Math Anal Appl, 2009, 353: 652–659.
- [4] Rakshit B, Banerjee S. Existence of chaos in a piecewise smooth two-dimensional contractive map [J]. Phys Lett A, 2009, 373: 2922–2926.
- [5] Wang Jian, Ding Xiao-Ling, Hu Banbi, et al. Characteristics of a Piecewise Smooth Area-Preserving Map [J]. Phys Rev E, 2001, 64: 1–9.
- [6] Jiang Y M, Lu Y Q, He D R, et al. A crisis of a stochastic web [J]. Eur Phys J D, 2004, 29: 285–292.
- [7] Shen Y, Dai J, Jiang Y M, et al. A fat fractal crisis in a quasi-dissipative system [J]. Phys Lett A, 2006, 348: 279–283.

[8] Chao X G, Dai J, Wang W X, et al. A semi—dissipative crisis [J]. Eur Phys J D, 2006, 40: 423—430.