

文章编号: 2095—0411 (2012) 02—0076—03

一类捕食模型的定性分析^{*}

刘 佳

(常州大学 数理学院, 江苏 常州 213164)

摘要: 建立了一类具有性别结构的捕食模型, 应用特征子空间分解与线性化方法得到了常微分方程组正平衡点局部稳定性的充分条件, 进一步利用构造适当的 Lyapunov 泛函的方法得到了正平衡点全局稳定的充分条件, 最后给出了模型在一定条件下的数值模拟, 也使结论得以验证。

关键词: 捕食模型; 渐近稳定; 有界性; 数值模拟

中图分类号: O 175.26

文献标识码: A

Qualitative Analysis of a Predator—Prey Model

LIU Jia

(School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: A predator—prey model with sex—structure is formulated. The sufficient condition of local asymptotic stability of the positive equilibrium is obtained by using the characteristic decomposition and linearization method. Moreover, the global asymptotic stability of the positive equilibrium is established by using and constructing a suitable Lyapunov function. Also, the numerical simulation is given verifying the result of this paper is correct.

Key words: predator—prey model; asymptotically stable; boundness; numerical simulation

近年来, 以 Volterra 和 Lotka 为代表的种群动力学有了很大发展^[1-6], 然而种群由不同个体组成, 个体之间的主要差别是性别和年龄, 为了更符合实际情况, 应该把种群动态参数 (出生率, 死亡率等) 与种群的性别结构和年龄结构结合起来考虑。但是, 目前这方面的工作并不多见, 其中文献 [7] 建立了两个食饵种群具有性别结构的捕食模型:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = b_1 v_2 - v_1 \left(d_1 + \frac{v_1 + v_2}{k} \right) - q v_1 u \\ \frac{dv_2}{dt} = \beta v_2 \left(1 - \frac{v_1 + v_2}{k} \right) - q v_2 u \\ \frac{du}{dt} = u \left(-a - bu + q_1 v_1 + q_2 v_2 \right) \end{cases}$$

得到了平衡点的渐近稳定性, 并考虑了捕食者的性别偏食现象。对上述模型参照 Leslie 系统^[8-12]可以建立如下食饵种群有性别结构的捕食者—食饵模型, 见式 (1):

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = b_1 v_2 - v_1 \left(d_1 + \frac{v_1 + v_2}{k} \right) - q v_1 u \\ \frac{dv_2}{dt} = \beta v_2 \left(1 - \frac{v_1 + v_2}{k} \right) - q v_2 u \\ \frac{du}{dt} = \gamma u \left(1 - \frac{u}{\sigma (v_1 + v_2)} \right) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 分别代表食饵种群在时刻 t 的雄性个数, 雌性个数, $u(t)$ 代表捕食者在时刻 t 的种群数, d_1 表示雄性食饵的死亡率, b_1 表

^{*} 收稿日期: 2012—02—06

作者简介: 刘佳 (1981—), 女, 江苏常州人, 硕士。

示雄性食饵的出生率, β, γ 分别代表雌性食饵种群和捕食种群的内在增长率, k 表示食饵种群的容纳量, q 表示捕食种群的捕食能力, σ 代表食饵种群对捕食种群的承载能力。假定参数 $d_1, b_1, \beta, \gamma, k, q, \sigma$ 是正常数, 且雌性个体不会因为因为没有配偶而不能生育。

为简化模型 (1), 作无量纲变换: $v_1/k \rightarrow u_1, v_2/k \rightarrow u_2, u/k\sigma \rightarrow u_3, qk\sigma \rightarrow a$, 得到

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = b_1 u_2 - u_1 (d_1 + u_1 + u_2) - a u_1 u_3 \\ \frac{du_2}{dt} = \beta u_2 (1 - u_1 - u_2) - a u_2 u_3 \\ \frac{du_3}{dt} = \gamma u_3 (1 - \frac{u_3}{u_1 + u_2}) \end{cases} \quad (2)$$

鉴于生态意义, 只考虑 (2) 的正平衡解, 记为 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T$, 易知此正平衡解是唯一的, 记作

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{b_1 \tilde{u}_3}{d_1 + b_1 + (a+1) \tilde{u}_3}, \\ \tilde{u}_2 &= \frac{d_1 \tilde{u}_3 + (a+1) \tilde{u}_3^2}{d_1 + b_1 + (a+1) \tilde{u}_3}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

1 有界性

定理 1 当 $\beta > \beta b_1 + ab_1 + a$ 时, 模型 (2) 满足初始条件 $(u_1(0), u_2(0), u_3(0)) \in R_+^3$ 的正解, $\underline{C} < (u_1, u_2, u_3) < \bar{C}$ 。

证明: 由模型 (2) 的第一个和第二个方程, 存在 T_0 , 当 $t \geq T_0$, 显然有 $u_1 \leq b_1, u_2 \leq 1$ 。由第三个方程可得 $\frac{du_3}{dt} \leq \gamma u_3 (1 - \frac{u_3}{1+b_1})$, 所以存在 T_1 , 当 $t \geq T_1$, 显然有 $u_3 \leq 1+b_1$, 由第二个方程可得 $u_2' \geq u_2 (\beta - \beta b_1 - ab_1 - a - \beta u_2)$, 当 $\beta > \beta b_1 + ab_1 + a$ 时, 存在 T_2 , 当 $t \geq T_2$, 显然有 $u_2 \geq 1 - b_1 - (ab_1 + a) / \beta \triangleq \underline{C}_2$, 又 $u_1' \geq b_1 \underline{C}_2 - u_1^2 - u_1 [d_1 + 1 + a(1+b_1)]$, 因为 $u_1^2 + u_1 [d_1 + 1 + a(1+b_1)] - b_1 \underline{C}_2 = 0$ 有一个正根记为 \underline{C}_1 , 则存在 T_3 , 当 $t \geq T_3$, 显然 $u_1 > \underline{C}_1$ 。同理可得存在 T_4 , 当 $t \geq T_4$, 显然 $u_3 > \underline{C}_3$ 。取 $T = \max \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, $\underline{C} = \max \{\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3\}$, $\bar{C} = 1+b_1$, 当 $t \geq T$ 时, 有 $\underline{C} < (u_1, u_2, u_3) < \bar{C}$ 。

2 稳定性

定理 2 正平衡解 \tilde{u} 是局部渐近稳定的。

证明: 系统 (2) 在正平衡点 \tilde{u} 处的 Jaccobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} & b_1 - \tilde{u}_1 & -a \tilde{u}_1 \\ -\beta \tilde{u}_2 & -\beta \tilde{u}_2 & -a \tilde{u}_2 \\ \gamma & \gamma & -\gamma \end{pmatrix}$$

特征多项式可写作 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3$,

由于 $b_1 - \tilde{u}_1 = \frac{b_1 (d_1 + b_1 + a \tilde{u}_3)}{d_1 + b_1 + (a+1) \tilde{u}_3} > 0$, 计算可得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} + \beta \tilde{u}_2 + \gamma > 0, \\ A_2 = (b_1 - \tilde{u}_1) \beta \tilde{u}_2 + (\beta + a) \gamma \tilde{u}_2 + \frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} (\gamma + \beta \tilde{u}_2) + a \gamma \tilde{u}_1 > 0, \\ A_3 = (\beta + a) \gamma \tilde{u}_2 (\frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} + b_1 - \tilde{u}_1) > 0, \end{cases}$$

直接计算

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 &= (\gamma + \beta \tilde{u}_2) [(b_1 - \tilde{u}_1) \beta \tilde{u}_2 + (\beta + a) \gamma \tilde{u}_2 + \frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} (\gamma + \beta \tilde{u}_2) + a \gamma \tilde{u}_1] + \\ &\quad \frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} [(b_1 - \tilde{u}_1) \beta \tilde{u}_2 + \frac{b_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1^2}{\tilde{u}_1} (\gamma + \beta \tilde{u}_2) \\ &\quad + a \gamma \tilde{u}_1] + a \gamma \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 - \beta \gamma \tilde{u}_2 (b_1 - \tilde{u}_1) - ab_1 \gamma \tilde{u}_2 > 0 \end{aligned}$$

由 Ruth-Hurwitz 判别定理, \tilde{u} 是局部稳定的。

为了使定理 2 的结论更加清楚, 利用数学软件 Matlab 7.0 进行数值模拟, (u_1, u_2, u_3) 的稳定性图像见图 1。

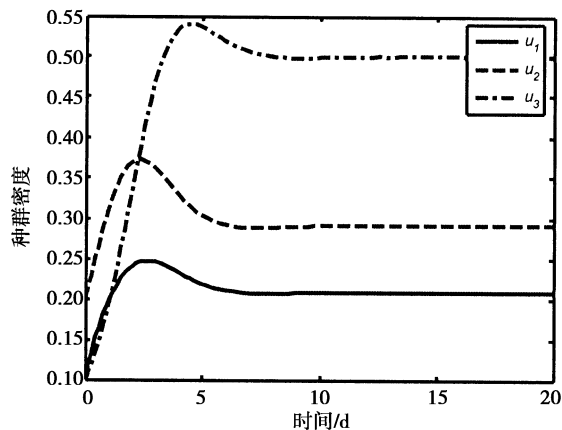


图 1 (u_1, u_2, u_3) 的稳定性图像

Fig. 1 The stability image of (u_1, u_2, u_3)

取 $b_1=2$, $d_1=2$, $a=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, 则 $\tilde{u} = (0.2, 0.3, 0.5)$, 令 (u_1, u_2, u_3) 的初值为 $(0.1, 0.2, 0.1)$, $t \in [0, 20]$,

定理 3 当 $b_1 < d_1 + (2a+3) \underline{C}$, $\beta > \beta b_1 + ab_1 + a$ 时, 正平衡解 \tilde{u} 是全局渐近稳定的。

证明: 定义 $V(u_1, u_2, u_3) = \int_{\tilde{u}_1}^{u_1} (u_1 - \tilde{u}_1) du_1 + m \int_{\tilde{u}_2}^{u_2} \frac{(u_2 - \tilde{u}_2)}{u_2} du_2 + n \int_{\tilde{u}_3}^{u_3} \frac{(u_3 - \tilde{u}_3)}{u_3} du_3$, 其中 m, n 待定, 显然 $V(t) \geq 0$, $t \geq 0$, 利用方程计算得

$$\begin{aligned} V'(t) &= V_{u_1} u_{1t} + V_{u_2} u_{2t} + V_{u_3} u_{3t} = \\ &= -(u_1 - \tilde{u}_1)^2 (d_1 + u_1 + u_2 + \tilde{u}_1 + au_3) - \\ &= m\beta (u_2 - \tilde{u}_2)^2 - (u_3 - \tilde{u}_3)^2 \frac{n\gamma}{u_1 + u_3} + \\ &= (u_1 - \tilde{u}_1) (u_2 - \tilde{u}_2) (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta) + \\ &= (u_1 - \tilde{u}_1) (u_3 - \tilde{u}_3) \left(\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - a \tilde{u}_1 \right) + \\ &= (u_2 - \tilde{u}_2) (u_3 - \tilde{u}_3) \left(\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - am \right) \leq \\ &= -(u_1 - \tilde{u}_1)^2 (d_1 + u_1 + u_2 + \tilde{u}_1 + au_3) - \\ &= m\beta (u_2 - \tilde{u}_2)^2 - (u_3 - \tilde{u}_3)^2 \frac{n\gamma}{u_1 + u_3} + \\ &= \frac{1}{2} (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta) (u_1 - \tilde{u}_1)^2 + \\ &= \frac{1}{2} (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta) (u_2 - \tilde{u}_2)^2 + \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - a \tilde{u}_1 \right) (u_1 - \tilde{u}_1)^2 + \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - a \tilde{u}_1 \right) (u_3 - \tilde{u}_3)^2 + \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - am \right) (u_2 - \tilde{u}_2)^2 + \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - am \right) (u_3 - \tilde{u}_3)^2 = \\ &= -(u_1 - \tilde{u}_1)^2 [d_1 + u_1 + u_2 + \tilde{u}_1 + au_3 - \\ &= \frac{1}{2} (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta + \frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - a \tilde{u}_1)] - \\ &= (u_2 - \tilde{u}_2)^2 [m\beta - \frac{1}{2} (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta + \frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - am)] - \\ &= \frac{1}{2} a (u_3 - \tilde{u}_3)^2 (m + \tilde{u}_1) \end{aligned}$$

$$\text{假设 } m = \frac{b_1 + 1}{\beta}, n = \frac{2b_1 \underline{C}}{\gamma},$$

$$\text{当 } b_1 < d_1 + (2a+3) \underline{C}, \beta > \beta b_1 + ab_1 + a, \text{ 有}$$

$$m\beta > \frac{1}{2} (b_1 + \frac{n\gamma}{u_1 + u_3}),$$

$$d_1 + (2a+3) \underline{C} > \frac{1}{2} (b_1 + \frac{n\gamma}{u_1 + u_3})$$

$$\text{则 } m\beta > \frac{1}{2} (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta + \frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - am),$$

$$d_1 + u_1 + u_2 + \tilde{u}_1 + au_3 > \frac{1}{2} (b_1 - \tilde{u}_1 - m\beta +$$

$$\frac{n\gamma}{u_1 + u_3} - a \tilde{u}_1)$$

所以 $V'(t) \leq 0$, $\forall t \geq t_0$, 并且 $V(t) = 0$ 当且仅当 $(u_1, u_2, u_3) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ 。定理证毕。

参考文献:

- [1] Peng R, Wang M X. Positive steady states of a prey-predator model with diffusion and non-monotone conversion rate [J]. Acta Mathematica Sinica, 2007, 23 (4): 749-760.
- [2] He X Z. Stability and delays in a predator-prey system [J]. J Math Anal Appl, 1996, 198 (4): 355-370.
- [3] 董士杰, 朱玉峻. 基于比率的两种群捕食者-食饵系统的周期解 [J]. 河北科技大学学报, 2004, 25 (1): 1-7.
- [4] 颜向平, 张存华. 一类具功能反应的食饵-捕食者两种群模型的定性分析 [J]. 生物数学学报, 2004, 19 (3): 323-327.
- [5] 陈柳娟, 孙建华. 具 Holling 第 II 类功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析 [J]. 生物数学学报, 2003, 18 (1): 33-36.
- [6] 吴承强. 一类具功能性反应的捕食者-食饵系统的极限环 [J]. 福州大学学报, 2004, 32 (4): 410-412.
- [7] 刘汉武, 王荣欣, 刘建新. 具有性别结构的食饵-捕食者模型 [J]. 生物数学学报, 2005, 20 (2): 179-182.
- [8] Leslie P H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics [J]. Biometrika, 1948, 35: 213-245.
- [9] Leslie P H, Gower J C. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species [J]. Biometrika, 1960, 47: 219-234.
- [10] Zhou X Y, Cui J G, Shi X G. A modified Leslie-Cower predator-prey model with prey infection [J]. JAMC, 2010, 33: 471-487.
- [11] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法 [M]. 成都: 四川科学技术出版社, 2003: 15-16.
- [12] 梁志清, 陈兰荪. 离散 Leslie 捕食与被捕食系统周期解的稳定性 [J]. 数学物理学报, 2006, 26A (4): 634-640.