

文章编号: 2095—0411 (2013) 04 - 0001 - 08

# 机构自由度公式的统一形式及其物理内涵<sup>\*</sup>

杨廷力<sup>1,2</sup>, 沈惠平<sup>1</sup>, 刘安心<sup>3</sup>

(1. 常州大学 机械工程学院, 江苏 常州 213016; 2. 中国石化金陵石化公司, 江苏 南京 210000; 3. 解放军理工大学 野战工程学院, 江苏 南京, 210007)

**摘要:** 由于并联机器人机构的发展, 最近十多年, 提出了 6 种新的主要的机构自由度 (DOF) 公式。在简述这 6 种公式的结构与特点的基础上给出了这些公式的统一形式及其物理意义, 以及 DOF 公式取得进展的原因; 对基于约束螺旋系的统一形式的 DOF 公式, 提出了 DOF 计算方法的改进建议, 并给出两个实例; 而基于运动分析的统一形式的 DOF 公式, 只适用于不含非独立运动元素的机构, 仅是具有一般性的基于方位特征集的 DOF 公式的特例。

**关键词:** 并联机构; 拓扑结构; 自由度; 方位特征; 约束分析; 运动分析

**中图分类号:** TH 11      **文献标识码:** A      **doi:** 10. 3969/j. issn. 2095—0411. 2013. 04. 001

## General form and Physical Meaning of the DOF Formula

YANG Ting-li<sup>1,2</sup>, SHEN Hui-ping<sup>1</sup>, LIU An-xin<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213016, China; 2. Sinopec Jinling Petrochemical Corp, Nanjing 210000, China; 3. Institute of Field Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

**Abstract:** Along with the development of robot mechanism research, 6 new DOF formulas have been proposed in the last decade. After analyzing their structures and characteristics, a Unified form that is able to cover all these 6 formulas is given and the corresponding physical meaning is discussed in this paper. For the uniform DOF formula based on constraint screw system, suggestions for improving the DOF calculation is proposed and 2 examples are introduced for illustration purpose. On the other hand, the uniform DOF formula based on kinematic analysis is not applicable to mechanism containing non-independent motion element and is only a special case of the general DOF formula based on POC set.

**Key words:** parallel mechanism; topological structure; degree of freedom (DOF); position and orientation characteristics (POC); constraint analysis; kinematic analysis

自由度是机构学理论的重要基本概念, 也是机构的一个重要的基本参数。一百多年来, 众多文献已提出几十种机构自由度公式, 文献 [1] 对这些公式进行了综述。其中, 重要的经典公式包括:

(1) Moroskine (1954) 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_M^{[2]} \quad (1)$$

式中:  $F$ —机构 DOF;  $f_i$ —第  $i$  个运动副的自由度;  $m$ —运动副数目;  $\xi_M = \xi_{ve}$ —机构速度方程组的秩, 或  $\xi_M = \xi_{di}$ —机构位移方程组的独立方程数。

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2013 - 08 - 15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51075045, 51375062)

作者简介: 杨廷力 (1940—), 男, 河南南阳人, 教授, 博士生导师。

式 (1) 的主要特点: ① 当  $\xi_M = \xi_{di}$  时, 得到机构的整周 DOF, 但由位移方程组确定  $\xi_{di}$  较为困难; 当  $\xi_M = \xi_{ve}$  时, 得到机构的瞬时 DOF, 需进行非瞬时 DOF 判定, 但由速度方程组确定  $\xi_{ve}$  较为简单。② 对机构运动的非奇异位置,  $\xi_{di} = \xi_{ve}$ , 瞬时 DOF 等于整周 DOF; 但对奇异位置,  $\xi_{ve} < \xi_{di}$ , 瞬时 DOF 大于整周 DOF, 需进行非瞬时判定。③ 为确定  $\xi_{di}$  和  $\xi_{ve}$ , 需要首先建立机构运动学方程。为便于机构拓扑结构设计, 应寻求基于机构拓扑结构的计算 DOF 的简单方法。

(2) Grubler - Kutzbach (1929) 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - d(m-n+1) \quad (2)$$

式中:  $F$ —机构 DOF;  $f_i$ —第  $i$  个运动副的自由度;  $m$ —运动副数目;  $n$ —构件数目;  $d$ —机构的阶数 (对空间机构,  $d=6$ ; 对平面或球面机构,  $d=3$ );  $v=m-n+1$ —机构的独立回路数。

式 (2) 的主要特点: ① 适用于独立回路的阶数相同的机构。② 尚未给出确定独立回路阶数  $d$  的一般方法。③ 比较式 (2) 与式 (1), 易知:

$$\xi_M = d(m-n+1)$$

(3) 张启先 (1961) 的 DOF 公式, Freudenstein and Alizade (1975) 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_j \quad (3)$$

式中:  $F$ —机构 DOF;  $\xi_j$ —第  $j$  个回路的独立位移方程数, 其它符号同式 (2)。

式 (3) 的主要特点: ① 适用于回路具有不同  $\xi_j$  的机构, 但尚未给出确定  $\xi_j$  的一般方法。② 尚未考虑不同回路的  $\xi_j$  之间存在的相关性。③ 比较式 (3) 与式 (1), 易知:

$$\xi_M = \sum_{j=1}^v \xi_j$$

并联机器人机构的发展推动了 DOF 分析的深入研究, 最近十多年, DOF 公式研究取得了新的进展。本文将讨论这些新的 DOF 公式的主要特点, DOF 公式的统一形式及其物理内涵等。

## 1 近十年提出的 DOF 公式及其特点

### 1.1 Dai, Huang and Lipkin 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - 6(m-n+1) + \dim(<S^r>) - \dim(\{S^r\}) \quad (4)$$

式中:  $F$ —DOF;  $\dim(<S^r>)$ —动平台约束螺旋集的元素数;  $\dim(\{S^r\})$ —动平台约束螺旋

集的秩; 其它符号同式 (2)。

式 (4) 的主要特点: ① 基于机构的约束分析, 确定瞬时 DOF, 需进行非瞬时 DOF 判定。② 应在同一个定坐标系中, 对同一个动坐标系, 建立支路的螺旋系。③ 是对经典 Grubler - Kutzbach 公式 (式 (2)) 的修正, 修正项为  $[\dim(<S^r>) - \dim(\{S^r\})]$ 。④ 比较式 (4) 与式 (1), 易知:

$$\xi_{ve} = 6(m-n+1) - \dim(<S^r>) + \dim(\{S^r\})$$

### 1.2 Huang, et al. 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - d(m-n+1) + \sum_{j=1}^p q_j - \lambda \cdot p - k \quad (5)$$

式中:  $F$ —DOF;  $d$ —螺旋系的阶,  $d=6-\lambda$ ;  $\lambda$ —机构的公共约束, 即与运动螺旋系所有螺旋相逆的反螺旋的数目;  $p$ —并联机构支路数;  $q_j$ —每个支路的约束螺旋数;  $k-p(q_j-\lambda)$  个约束螺旋的阶。

式 (5) 的主要特点: ① 基于机构的约束分析, 确定瞬时 DOF, 需进行非瞬时 DOF 判定。② “以代数和几何相结合, 和以逻辑思维与形象思维相结合的方法, 化解分析中的复杂过程。这个方法又采取以分支坐标系为主, 加上逻辑推理的方法, 避免了用统一坐标系对并联机构不同分支分析时造成的复杂非线性问题”。即, “将坐标系建立在分支上, 并使螺旋的 6 个元素尽可能的简单, 让很多元素为零或 1”; “不依赖统一的坐标系来汇总各个分支部分的螺旋, 而是通过以逻辑思维和形象思维相结合的办法以逻辑推理的方法, 导出整个机构的约束螺旋系和运动螺旋系, 以及它们的阶”。③ 是对经典 Grubler - Kutzbach 公式 (2) 的修正, 修正项为  $v = \sum_{j=1}^p q_j - \lambda \cdot p - k$ 。④ 比较式 (5) 与式 (1), 易知:

$$\xi_{ve} = d(m-n+1) - v$$

### 1.3 Kong and Gosselin 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} C^j + C = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\}) \quad (6)$$

式中:  $F$ —DOF;  $f_i$ —第  $i$  个运动副的自由度;  $m$ —运动副数目;  $(v+1)$ —并联机构的支路数;  $C^j$ —第  $j$  条支路运动螺旋系的阶, 亦可记作  $\text{rank}$

( $S_j$ );  $C$ —动平台运动螺旋系的阶, 亦可记作  $\text{rank}(\{S\})$ 。

式 (6) 的主要特点: ① 基于机构的约束分析, 确定瞬时 DOF, 需进行非瞬时 DOF 判定。② 应在同一个定坐标系中, 对同一个动坐标系, 建立支路的螺旋系。③ 比较式 (6) 与式 (1), 易知:

$$\xi_{ve} = \sum_{j=1}^{(v+1)} C^j - C$$

#### 1.4 Gogu 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(R_{A_j}) + \text{rank}(\cap_{j=1}^{(v+1)} R_{A_j})^{[11]}$$

(7)

式中:  $F$ —DOF;  $(v+1)$ —并联机构的支路数;  $\text{rank}(R_{A_j})$ —第  $j$  条支路两端构件的相对速度空间的维数;  $R_{A_j}$ —第  $j$  条支路两端构件的相对速度空间; 其它符号同式 (2)。

式 (7) 的主要特点: ① 基于机构速度分析, 得到瞬时 DOF, 并用观察法进行非瞬时 DOF 的判定。② 在同一个定坐标系中, 对同一个动坐标系, 建立支路的相对速度空间。③ 比较式 (7) 与式 (1), 易知:

$$\xi_{ve} = \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(R_{A_j}) - \text{rank}(\cap_{j=1}^{(v+1)} R_{A_j})$$

#### 1.5 Rico et al. 的并联机构 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim(A_j^{\text{mlf}}) + \dim(\cap_{j=1}^{(v+1)} A_j^{\text{mlf}})^{[12-13]}$$

(8)

式中,  $F$ —活动度;  $(v+1)$ —并联机构的支路数;  $A_j^{\text{mlf}}$ —动平台相对于静平台的位移子群, 当两平台之间只由第  $j$  条支路联接时;  $\dim(A_j^{\text{mlf}})$ —位移子群  $A_j^{\text{mlf}}$  的维数。

式 (8) 的主要特点: ① 基于位移子群方法, 确定机构全周 DOF。② 适用于具有位移子群结构的机构, 尚不能用于具有子流形结构的机构。③ 比较式 (8) 与式 (1), 易知

$$\xi_{di} = \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim(A_j^{\text{mlf}}) - \dim(\cap_{j=1}^{(v+1)} A_j^{\text{mlf}})$$

#### 1.6 Yang and Sun 的 DOF 公式

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \dim\{(\cap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{(j+1)}}\}^{[14-18]}$$

(9)

式中:  $F$ —DOF;  $v$ —独立回路数,  $v = m - n + 1$ ;  $M_{b_i}$ —第  $i$  条支路末端构件的方位特征集 (POC

集), 且可含非独立元素;  $M_{b_{(j+1)}}$ —第  $(j+1)$  条支路末端构件的 POC 集; 其它符号同式 (2)。

式 (9) 的特点: ① 得到全周 DOF, 适用于并联机构和任意多回路空间机构。② 在同一个定坐标系中, 对同一个动坐标系, 确定支路的 POC 集。③ 比较式 (9) 与式 (1), 易知:

$$\xi_{di} = \sum_{j=1}^v \dim\{(\cap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{(j+1)}}\}$$

另外, 将由数学的集合论公式:  $\dim(R_A \cup R_B) = \dim(R_A) + \dim(R_B) - \dim(R_A \cap R_B)$  代入式 (9), 可得到

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim\{M_{b_j}\} + \dim\{\cap_{j=1}^{(v+1)} M_{b_j}\}^{(10)}$$

但应注意到, 当 POC 集含有非独立元素时, 应有

$$\dim\{\cap_{j=1}^{(v+1)} M_{b_j}\} \leq \text{DOF}^{(11)}$$

因此, 式 (10) 只适用于 POC 集不含非独立元素的机构, 即式 (10) 是式 (9) 的特例。

## 2 DOF 公式的统一形式及物理意义

### 2.1 DOF 公式的统一形式

在最近十年提出的 DOF 公式中, 式 (6)、式 (7)、式 (8) 与式 (10) 已具有式 (10) 所示的统一形式, 而式 (4) 与式 (5) 亦可化为统一形式, 现证明如下。

(1) 公式 (4) 化为统一形式

由文献 [6] 可知:  $\text{rank}(S_j^r)$ —第  $j$  条支路约束螺旋系的秩, 则  $\dim(\langle S^r \rangle) = \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j^r)$ ; 其中,  $\text{rank}(S_j) = 6 - \text{rank}(S_j^r)$ —第  $j$  条支路运动螺旋系的秩;  $\dim(\{S^r\}) = \text{rank}(\{S^r\})$ —动平台约束螺旋系的秩;  $\text{rank}(\{S^r\}) = 6 - \text{rank}(\{S^r\})$ —动平台运动螺旋系的秩;  $v = (m - n + 1)$ —独立回路数; 其它符号同式 (4)。

将以上符号代入式 (4), 得到

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^m f_i - 6(m - n + 1) + \{\dim(\langle S^r \rangle) - \dim(\{S^r\})\} = \\ &= \sum_{i=1}^m f_i - 6v + \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j^r) - \text{rank}(\{S^r\}) = \\ &= \sum_{i=1}^m f_i - 6v + \sum_{j=1}^{(v+1)} [6 - \text{rank}(S_j)] - \text{rank}(\{S^r\}) = \\ &= \sum_{i=1}^m f_i - 6v + \{6(v+1) - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) - \text{rank}(\{S^r\})\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + [6 - \text{rank}(\{S^r\})] = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\})$$

因此, 式 (4) 可化为 DOF 公式的统一形式, 如表 1 所示。

(2) 公式 (5) 化为统一形式

由文献 [9] 可知:  $v = m - n + 1$  为独立回路数;  $p = v + 1$  为支路数;  $d = 6 - \lambda$  为机构的阶数;  $\text{rank}(S_j^r) = \lambda + t_j$  为第  $j$  条支路约束螺旋系的秩;  $\text{rank}(S_j) = 6 - (\lambda + t_j)$  为第  $j$  条支路运动螺旋系的秩;  $\text{rank}(\{S^r\}) = \lambda + k$  为动平台约束螺旋系的秩;  $\text{rank}(\{S\}) = 6 - (\lambda + k)$  为动平

台运动螺旋系的秩; 其它符号同式 (5)。

将以上符号代入式 (5), 得到

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - d(m - n + 1) + \sum_{j=1}^p t_j - k = \sum_{i=1}^m f_i - (6 - \lambda)(p - 1) + \sum_{j=1}^p t_j - k = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^p [6 - (\lambda + t_j)] + [6 - (\lambda + k)] = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} [6 - \text{rank}(S_j^r)] + [6 - \text{rank}(\{S^r\})] = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\})$$

因此, 式 (5) 可化为 DOF 公式的统一形式。

表 1 DOF 公式的统一形式与主要特点

Table 1 Unified form and key features of DOF formula

DOF 公式	DOF 公式的统一形式	主要特点	
Dai, et al. 的 DOF 公式 (4):			
$F = \sum_{i=1}^m f_i - 6(m - n + 1) + \dim(\langle S^r \rangle) - \dim(\{S^r\})$			
Huang, et al. 的 DOF 公式 (5):			
$F = \sum_{i=1}^m f_i - d(m - n + 1) + \sum_{j=1}^p q_j - \lambda \cdot p - k$	$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\})$	瞬时 DOF	基于约束分析
Kong, Gosselin 的 DOF 公式 (6):			
$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} C^j + C$			
Gogu 的 DOF 公式 (7):			
$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(R_{A_j}) + \text{rank}(\bigcap_{j=1}^{(v+1)} R_{A_j})$	$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(R_{A_j}) + \text{rank}(\bigcap_{j=1}^{(v+1)} R_{A_j})$	瞬时 DOF	基于运动分析
Rico, et al. 的 DOF 公式 (8):			
$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim(A_j^{\text{mlf}}) + \dim(\bigcap_{j=1}^{(v+1)} A_j^{\text{mlf}})$	$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim(A_j^{\text{mlf}}) + \dim(\bigcap_{j=1}^{(v+1)} A_j^{\text{mlf}})$	整周 DOF	基于运动分析
Yang, Sun 的 DOF 公式 (9):			
$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^n \dim(\bigcap_{i=1}^n M_{b_i}) \cup M_{b(j+1)}$	$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim\{M_{b_j}\} + \dim\{\bigcap_{j=1}^{(v+1)} M_{b_j}\}$ (该式仅是式 (9) 的特例)	整周 DOF	基于运动分析

## 2.2 DOF 公式的物理意义

### 2.2.1 并联机构的冗余 DOF

统一形式的 DOF 公式 (表 1) 的第 3 项是动平台的运动输出的独立元素数。如果对这些独立元素赋值, 即动平台方位被固定, 成为定平台的一部分。这时, DOF 公式可改写为

$$F - \dim\left\{\bigcap_{j=1}^{(v+1)} \{M_{b_j}\}\right\} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim\{M_{b_j}\} \quad (12)$$

显然, 式 (12) 等号右边两项表示在确定动平台方位之后, 为使并联机构的所有支路具有确定构形所需要的主动输入数目, 即, 机构冗余 DOF,

记作

$$D_{\text{Re}} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim\{M_{b_j}\} \quad (13)$$

式中:  $D_{\text{Re}}$ —机构冗余度 DOF; 其它符号同前式。

### 2.2.2 并联机构的独立位移 (速度) 方程数

比较式 (1) 与统一形式的 DOF 公式 (表 1), 易知并联机构的独立位移 (速度) 方程数为

$$\xi_{\text{Pa}} = \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim\{M_{b_j}\} - \dim\left\{\bigcap_{j=1}^{(v+1)} \{M_{b_j}\}\right\} \quad (14)$$

式中:  $\xi_{\text{Pa}}$ —并联机构的独立位移 (速度) 方程数, 其它符号同前式。

例 2.1 分别确定图 1 (a)、(b) 所示 3 支路平面并联机构的冗余 DOF 与独立位移 (速度) 方

程数。

(1) 对图 1 (a) 所示 3 支路平面并联机构

由串联机构方位特征方程<sup>[17-18]</sup>, 易知支路 POC 集的维数为

$$\dim \{M_{b_j}\} = 3, j=1, 2, 3$$

由并联机构方位特征方程<sup>[17-18]</sup>, 易知动平台 POC 集的维数为

$$\dim \left\{ \bigcap_{j=1}^3 M_{b_j} \right\} = 3$$

并联机构的冗余 DOF

$$D_{Re} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim \{M_{b_j}\} = 9 - (3+3+3) = 0$$

并联机构的独立位移(速度)方程数

$$\xi_{Pa} = \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim \{M_{b_j}\} - \dim \left\{ \bigcap_{j=1}^{(v+1)} M_{b_j} \right\} = 3 \times 3 - 3 = 6$$

(2) 对图 1 (b) 所示 3 支路平面并联机构

由串联机构方位特征方程<sup>[17-18]</sup>, 易知支路 POC 集的维数为

$$\dim \{M_{b_j}\} = 3, j=1, 2, 3$$

由并联机构方位特征方程<sup>[17-18]</sup>, 易知动平台 POC 集的维数为

$$\dim \left\{ \bigcap_{j=1}^3 M_{b_j} \right\} = 3$$

并联机构的冗余 DOF

$$D_{Re} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim \{M_{b_j}\} = 12 - (3+3+3) = 3$$

并联机构的独立位移(速度)方程数

$$\xi_{Pa} = \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim \{M_{b_j}\} - \dim \left\{ \bigcap_{j=1}^{(v+1)} M_{b_j} \right\} = 3 \times 3 - 3 = 6$$

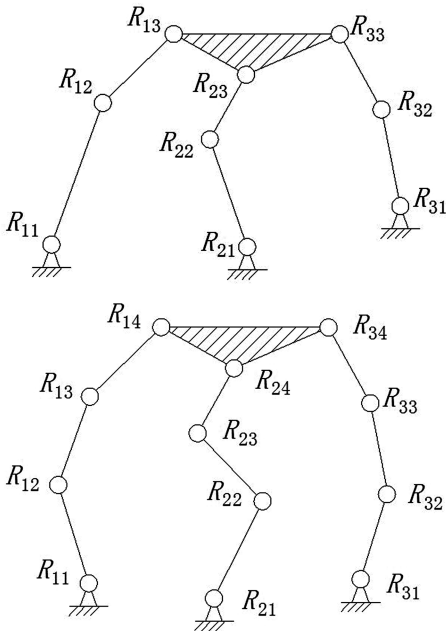


图 1 3 支路平面并联机构

Fig. 1 Planar parallel mechanism with three branch chains

(3) DOF 公式进展的背景

最近十多年, 有关文献提出了新的 DOF 公式 (见节 1), 并导出了这些 DOF 公式的统一形式 (见表 1)。显然, DOF 公式研究取得了新的进展。取得进展的主要原因如下: ①DOF 公式揭示了机构的拓扑结构、DOF 与运动方位特征 3 者之间的映射关系, 如图 2 (a) 所示。顺便说明, 机构运动学方程和动力学方程, 揭示的映射关系, 分别如图 2 (b) 和图 2 (c) 所示。②在揭示机构拓扑结构、DOF 与运动方位特征 3 者之间的映射关系中, 机构拓扑结构的数学描述包括 3 个要素 (即, 运动副类型、构件之间的联接关系, 以及新引入的尺度约束类型), 即拓扑结构数学描述的几何化<sup>[17-18]</sup>。而传统的机构拓扑结构的数学描述只包括两个要素 (即, 运动副类型、构件之间的联接关系)。

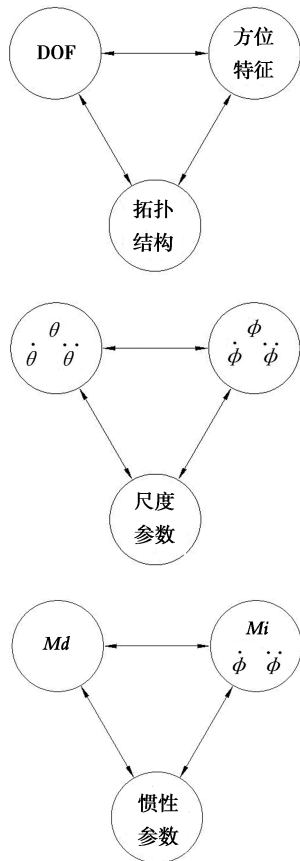


图 2 机构拓扑学、运动学与动力学方程揭示的映射关系

Fig. 2 Mapping relationships among topology equations, kinematics equations and dynamics equations

### 3 DOF 分析的基本方法及主要特点

#### 3.1 DOF 分析的两种方法

(1) 基于约束分析的方法



基于约束分析, 式 (4)、式 (5) 与式 (6), 可得到机构的瞬时 DOF, 需判定是否为全周 DOF。

### (2) 基于运动分析的方法

式 (7)、式 (8) 与式 (9) 都属于该类方法:  
① 基于 POC 集的式 (9), 可得到机构的全周 DOF。  
② 基于位移子群的式 (8), 可得到机构的全周 DOF, 但尚不能用于子流形机构。  
③ 基于速度分析的式 (7), 可得到机构的瞬时 DOF, 用观察法判定是否为全周 DOF<sup>[11]</sup>。

## 3.2 基于约束分析的 DOF 公式

### 3.2.1 基本思想

文献 [9] 提出的基于约束螺旋系的 DOF 公式 (式 (5)) 的基本思想: “以代数和几何相结合, 和以逻辑思维与形象思维相结合的方法, 化解分析中的复杂过程。这个方法又采取以分支坐标系为主, 加上逻辑推理的方法, 避免了用统一坐标系对并联机构不同分支分析时造成的复杂非线性问题”。其核心步骤包括: ① 以分支坐标系得到分支的运动螺旋系; ② 由分支运动螺旋系, 经互易积运算, 得到分支约束螺旋系; ③ 通过以逻辑思维和形象思维相结合的办法以逻辑推理的方法, 导出整个机构的约束螺旋系以及螺旋系的阶; ④ 由机构的约束螺旋系, 经互易积运算, 得到机构的运动螺旋系。

本文认为: 按照力学原理, 基于约束分析的 DOF 计算, 应在同一个定坐标系中, 且对同一个动坐标系, 确定各支路的约束螺旋系与动平台的约束螺旋系, 再进行相关性判定。因此, 应将上述所有分支的约束螺旋系向同一个动坐标系的原点  $o'$  进行化简, 再对化简后得到的机构约束螺旋系进行相关性判定, 以确定机构 DOF。显然, 这一方法属于几何法<sup>[18-19]</sup>, 现举例说明之。

例 3.1 确定图 3 (a)、(b) 所示两支路并联机构的 DOF。其中, 图 3 (a) 两支路的  $P$  副相互平行, 且垂直于两球副中心的连线; 图 3 (b) 两支路的  $P$  副相互平行, 但不垂直于两球副中心的连线。

#### (1) 对图 3 (a) 所示两支路并联机构

##### ① 确定支路约束螺旋系

由螺旋理论易知, 左支路约束螺旋系为: 过  $S_1$  副中心的沿  $x$  轴与  $y$  轴的两个约束力  $S_{11}^r$  与  $S_{12}^r$ ; 右支路约束螺旋系为: 过  $S_2$  副中心的分别平

行于  $x$  轴与  $y$  轴的两个约束力  $S_{21}^r$  与  $S_{22}^r$ 。

##### ② 所有支路的约束螺旋系向同一个基点化简

将两个约束力  $S_{21}^r$  与  $S_{22}^r$  向基点  $o_1$  化简, 得到作用在基点  $o_1$  的两个约束力  $S_{21}^{r(o_1)}$  与  $S_{22}^{r(o_1)}$  和过基点  $o_1$  的一个约束力偶  $M_{22}^{r(o_1)} = S_{22}^r \times l_{(o_1-o_2)}$ 。显然,  $S_{22}^{r(o_1)}$  与  $M_{22}^{r(o_1)}$  线性相关。

##### ③ 确定动平台约束螺旋系的秩

显然, 对同一个基点  $o_1$  的动平台约束螺旋系的最大线性无关组为:  $S_{11}^r, S_{12}^r$  与  $M_{22}^{r(o_1)}$ 。即:  $\text{rank}(\{S^{r(o_1)}\}) = 3$ 。

##### ④ 确定机构 DOF

由 DOF 公式的统一形式可知, 机构 DOF 为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\}) = 8 - 2 \times (6 - 2) + (6 - 3) = 3$$

易知, 机构有 2 个全周 DOF: 沿  $P$  副方向的整体移动与围绕 2 个  $S$  副中心连线的局部转动 DOF; 还有 1 个垂直于 2 个  $S$  副中心连线的瞬时转动 DOF。

#### (2) 对图 3 (b) 所示两支路并联机构

##### ① 确定支路约束螺旋系

由螺旋理论易知, 左支路约束螺旋系为: 过  $S_1$  副中心的沿  $x$  轴与  $y$  轴的两个约束力  $S_{11}^r$  与  $S_{12}^r$ ; 右支路约束螺旋系为: 过  $S_2$  副中心的分别平行于  $x$  轴与  $y$  轴的两个约束力  $S_{21}^r$  与  $S_{22}^r$ 。

##### ② 所有支路的约束螺旋系向同一个基点化简

将 2 个约束力  $S_{21}^r$  与  $S_{22}^r$  向基点  $o_1$  化简, 得到作用在基点  $o_1$  的 2 个约束力  $S_{21}^{r(o_1)}$  与  $S_{22}^{r(o_1)}$  和过基点  $o_1$  的 2 个约束力偶

$$M_{22}^{r(o_1)} = S_{22}^r \times l_{(o_1-o_2)} \text{ 与 } M_{21}^{r(o_1)} = S_{21}^r \times l_{(o_1-o_2)}。$$

##### ③ 确定动平台约束螺旋系的秩

显然, 对同一个基点  $o_1$  的动平台约束螺旋系的最大线性无关组为:  $S_{11}^r, S_{12}^r, M_{21}^{r(o_1)}$  与  $M_{22}^{r(o_1)}$ , 即:  $\text{rank}(\{S^{r(o_1)}\}) = 4$ 。

##### ④ 确定机构 DOF

由 DOF 公式的统一形式可知, 机构 DOF 为:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\}) = 8 - 2 \times (6 - 2) + (6 - 4) = 2$$

易知, 机构有 2 个全周 DOF: 沿  $P$  副方向的整体移动与围绕 2 个  $S$  副中心连线的局部转动 DOF。

例 3.2 确定图 4 所示 3 支路并联机构的 DOF。其中, 3 个支路的  $P$  副相互平行, 且不垂直于 3 个球副中心所在的平面。

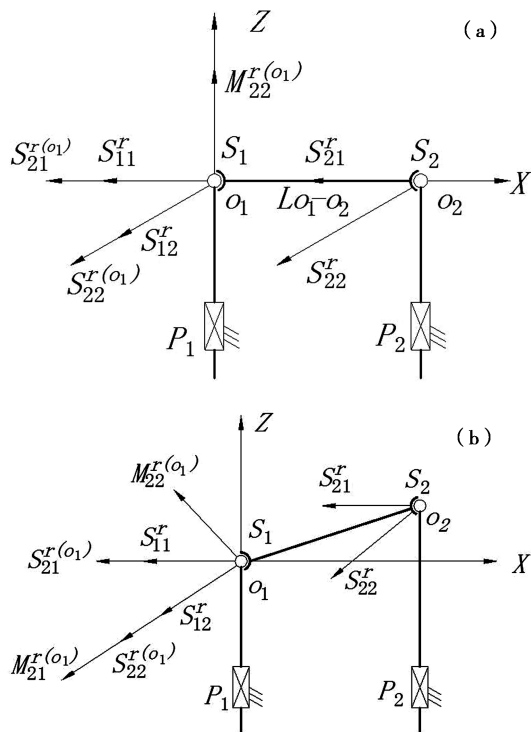


图 3 两支路并联机构

Fig. 3 Parallel mechanisms with two branches

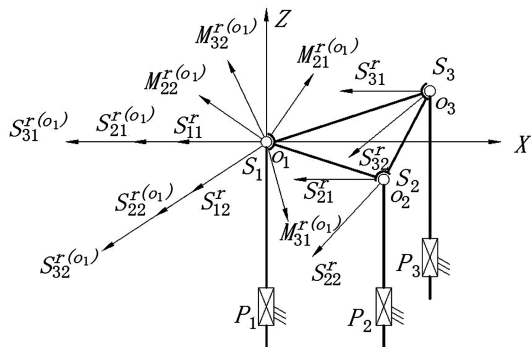


图 4 3 支路并联机构

Fig. 4 Parallel mechanism with three branches

### (1) 确定支路约束螺旋系

由螺旋理论易知, 3 个支路的约束螺旋系分别为: 过  $S_1$  副中心的沿  $x$  轴与  $y$  轴的 2 个约束力  $S_{11}^r$  与  $S_{12}^r$ ; 过  $S_2$  副中心, 分别平行于  $x$  轴与  $y$  轴的 2 个约束力  $S_{21}^r$  与  $S_{22}^r$ ; 过  $S_3$  副中心的分别平行于  $x$  轴与  $y$  轴的 2 个约束力  $S_{31}^r$  与  $S_{32}^r$ 。

### (2) 所有支路的约束螺旋系向同一个基点化简

将 4 个约束力  $S_{21}^r$ ,  $S_{22}^r$ ,  $S_{31}^r$  与  $S_{32}^r$  向基点  $o_1$  化简, 得到通过基点  $o_1$  的 4 个约束力:  $S_{21}^{r(o_1)}$ ,  $S_{22}^{r(o_1)}$ ,  $S_{31}^r$  与  $S_{32}^{r(o_1)}$ , 以及过基点  $o_1$  的 4 个约束力偶:

$$M_{22}^{r(o_1)} = S_{22}^r \times l_{(o_1-o_2)}, M_{21}^{r(o_1)} = S_{21}^r \times l_{(o_1-o_2)},$$

$$M_{31}^{r(o_1)} = S_{31}^r \times l_{(o_1-o_3)}, M_{32}^{r(o_1)} = S_{32}^r \times l_{(o_1-o_3)}。$$

### (3) 确定动平台约束螺旋系的秩

显然, 对同一个基点  $o_1$  的动平台约束螺旋系

的最大线性无关组为:  $S_{11}^r$ ,  $S_{12}^r$ ,  $M_{21}^{r(o_1)}$ ,  $M_{22}^{r(o_1)}$  与  $M_{32}^{r(o_1)}$ , 即:  $\text{rank}(\{S^{r(o_1)}\}) = 5$ 。

### (4) 确定机构 DOF

由 DOF 公式的统一形式可知, 机构 DOF 为:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_j) + \text{rank}(\{S\}) = 12 - 3 \times (6-2) + (6-5) = 1$$

易知, 机构只有一个沿  $P$  副方向整体移动的全周 DOF。

### (5) 讨论

当图 4 所示并联机构的 3 个  $P$  副垂直于 3 个球副中心的所在平面时, 不难证明, 该机构  $\text{DOF} = 3$ 。其中, 有 1 个沿  $P$  副方向的整体移动的全周 DOF, 又有 2 个分别围绕 2 个  $S$  副中心连线的瞬时转动 DOF。

### 3.2.2 DOF 的非瞬时性判定

基于约束分析的 DOF 公式可得到瞬时 DOF, 但需要判定是否是全周 DOF。文献 [20] 提出了基于“不变螺旋系”的判定方法, 但尚不适用于子流形机构; 文献 [10] 提出了非瞬时 DOF 判定的五步法; 文献 [9] 提出了对机构进行具体分析的判定方法。但目前尚未见到有关文献提出非瞬时 DOF 判定的一般方法。

对于既包含全周 DOF, 同时又包含瞬时 DOF 的一类机构 (见例 3.1 之图 3 (a) 与例 3.2 的 ⑤), 其非瞬时 DOF 判定也许更为复杂。

## 3.3 基于运动分析的 DOF 公式

### 3.3.1 基本思想

#### (1) 基于 POC 集的 DOF 公式的基本思想

基于 POC 集的式 (9) 是在同一个定坐标系中, 且对同一个动坐标系, 确定各支路的 POC 集和动平台的 POC 集, 以得到机构的 DOF; 而统一形式的式 (10), 仅是式 (9) 的特例, 只适用于 POC 集不含非独立元素的机构。因此, 式 (9) 更具有一般性。

#### (2) 基于位移子群的 DOF 公式的基本思想

基于位移子群的式 (8), 应在同一个定坐标系中且对同一个动坐标系, 计算 DOF。

#### (3) 基于速度空间的 DOF 公式的基本思想

基于速度空间的式 (7), 在同一个定坐标系中且对同一个动坐标系, 计算 DOF。

基于运动分析的统一形式的 DOF 公式 (式 (7)、式 (8)、式 (10)), 仅是式 (9) 的特例。

### 3.3.2 DOF 的非瞬时性

① 由 DOF 公式 (9), 可得到全周 DOF; ② 由 DOF 公式 (8), 可得到全周 DOF, 但尚不能用于子流形机构<sup>[18-19]</sup>; ③ 由 DOF 公式 (7), 得到瞬时 DOF, 用观察法确定其非瞬时性<sup>[11]</sup>。

## 4 结 论

(1) 揭示了最近十多年提出的新的 DOF 公式之间的内在联系, 给出了 DOF 公式的统一形式及其主要特点, 见表 1。

(2) 统一形式的 DOF 公式的物理意义: ① DOF 公式右边的第 3 项为动平台的独立方位特征参数的数目 (即, 维数); 第一项与第二项之差等于支路的冗余 DOF; ② DOF 公式右边的第二项与第 3 项之差等于机构的独立位移方程数; ③ DOF 公式揭示了机构的拓扑结构、DOF 与运动方位特征 3 者之间的映射关系。

(3) 基于约束分析的 DOF 公式, 当由分支坐标系确定分支的约束螺旋系时, 应将所有分支约束螺旋系向同一个动坐标系的原点  $o'$  进行化简, 再对化简后得到的约束螺旋系进行相关性判定, 以确定机构 DOF。

(4) 基于运动分析的 DOF 公式 (9)、式 (10) 是在同一个定坐标系中, 对同一个动坐标系, 确定各支路的 POC 集和动平台的 POC 集, 可得到机构的整周 DOF。式 (9) 适用于 POC 集含非独立元素的机构, 更具有一般性。而统一形式的 DOF 公式 (式 (10)) 仅是式 (9) 的特例。

### 参考文献:

- [1] Gogu, Grigore. Mobility of mechanisms; a critical review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40 (9): 1068 - 1097.
- [2] Moroskine Y F. General analysis of the theory of mechanisms [M]. Moscow: Akad. Nauk, SSSR, 1954.
- [3] Kutzbach K. Mechanische leitungsverzweigung, ihre gesetze und anwendungen [J]. Maschinenbau, 1929 (8): 710 - 716.
- [4] Zhang Q X. Study on structural theory of spatial mechanisms [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1962, 9 (1): 7 - 32.
- [5] Freudenstein F, Alizade R. On the degree of freedom of mechanisms with variable general constraint [C] // Fourth World Congress on the Theory of Machines and

- Mechanisms. London: Mech Eng Publ Ltd, 1975: 51 - 56.
- [6] Dai J S, Huang Z, Lipkin H. Mobility of overconstrained parallel mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 128: 220 - 229.
- [7] Li Q C, Huang Z. Mobility analysis of a novel 3 - 5R parallel mechanism family [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126: 79 - 82.
- [8] 黄真, 赵永生, 赵铁石, 等. 高等空间机构学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [9] 黄真, 刘婧芳, 李艳文. 论机构自由度 - 寻找了 150 年的自由度通用公式 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [10] Kong X W, Gosselin C M. Mobility analysis of parallel mechanisms based on screw theory and the concept of equivalent serial kinematic chain [C] // Proc. of the 2005 ASME Design Engineering Technical Conf. & Computers and Information in Engineering Conf. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2005: 911 - 920.
- [11] Gogu G. Mobility and spatiality of parallel robots revisited via theory of linear transformations [J]. European J of Mechanics A/Solid, 2005, 24: 690 - 711.
- [12] Rico J M, Ravani B. On mobility analysis of linkages using group theory [J]. ASME J Mech Des, 2003, 125: 70 - 80.
- [13] Rico J M, Aguilera L D, Gallardo J, et al. A more general mobility criterion for parallel platforms [J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2006, 128 (1): 207 - 219.
- [14] Yang T L, Sun D J. General formula of degree of freedom for parallel mechanisms and its application [C] // Proc of ASME 2006 Mechanisms Conference. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2006: 10.
- [15] Yang T L, Sun D J. A general formula of degree of freedom for parallel mechanisms [C] // Proc of the ASME 32th Mechanisms and Robots Conference. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2008: 1379 - 1390.
- [16] Yang T L, Sun D J. A general DOF formula for parallel mechanisms and multi - loop spatial mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4 (1): 1 - 17.
- [17] Yang T L, Liu A X, Luo Y F, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of robot mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2009, 131 (2): 1 - 17.
- [18] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2012: 75 - 99.
- [19] Yang T L, Liu A X, Shen H P, et al. On the correctness and strictness of the position and orientation characteristic equation for topological structure design of robot mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2013 (5): 1 - 18.
- [20] Davidson J K, Hunt K H. Robots and screw theory: application of kinematics and statics to robotics [M]. London: Oxford University Press, 2004: 60 - 70.