

文章编号:2095-0411(2015)03-0080-04

## 由保守向混合耗散性转变的分段连续系统

巢小刚,陆苏青

(常州大学 数理学院,江苏 常州 213164)

**摘要:**研究了一个具有过电压保护功能的电路模型。当控制参数  $c = 1$  时,系统是一个连续保守系统,相平面由混沌海和规则椭圆岛主宰;当控制参数  $c < 1$  时,系统转变为一个分段连续的半耗散系统,混沌海转变为瞬态混沌。随着控制参数  $c$  的不断减小,瞬态混沌的测度逐渐变小,迭代在瞬态混沌中的特征时间随控制参数按指数函数关系变化。

**关键词:**处处连续;分段连续;半耗散;瞬态混沌;特征时间

中图分类号:O 322

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2015.03.016

## A Circuit Model Transforming from Continuous Conservation to Piecewise-Continuous Semi-Dissipation

CHAO Xiaogang, LU Suqing

(School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** The thesis studies a circuit model with over voltage protection. When the control parameter  $c = 1$ , the system is a continuous conservative system, whose phase plane is dominated by a chaotic sea and regular elliptical islands. When the control parameter  $c < 1$ , the system transforms into a semi-dissipative system that is piecewise continuous, the chaotic sea transforms into the transient chaos. With the continuous reduction of the control parameter, the measurement of the transient measurement gradually becomes smaller, the feature time of iterating in the transient chaos changes in exponential function relationship.

**Key words:** everywhere continuous; piecewise continuous; semi-dissipative; the transient chaos; the feature time

近 20 年来分段连续系统受到人们的广泛关注<sup>[1-2]</sup>。与连续系统相比,分段连续系统有自己独特的动力学特性。在 2 个耗散子映象耦合而成的分段连续系统中,屈世显<sup>[3]</sup>等人发现了 V 型阵发与 V 型阵发前奏锁相阶梯,吴顺光<sup>[4]</sup>等人发现了映孔导致激变和不连续性导致激变。在 2 个保守子映象不可逆耦合而成的分段连续系统中,王健、王旭明、姜玉梅、申影等人发现了不可逆性导致的

弱耗散性一类耗散性,以及由类耗散性导致的“类激变”<sup>[5-8]</sup>。在一个保守子映象与一个耗散子映象不可逆耦合而成的分段连续系统中,既存在由耗散子映象带来的强耗散性-传统耗散性,又存在不可逆性导致的弱耗散性-类耗散性,以及两者混合导致的“混合耗散性”,这样一种系统被称为“半耗散系统”。在半耗散系统中,系统大范围、长时间的行为由混合耗散性支配,这是半耗散系统区别

收稿日期:2014-04-29。

基金项目:江苏工业学院数理基金(ZMF09020024)。

作者简介:巢小刚(1977—),男,江苏常州人,硕士,副教授,主要从事非线性动力学研究。

于传统耗散系统与类耗散系统的一个基本特征。这种混合耗散性会导致半耗散系统中的特征激变-半耗散激变<sup>[9]</sup>。

到目前为止,人们主要研究各类分段连续系统的特征动力学特性,而对系统由连续保守向分段连续半耗散转变的研究还未见报道。本文报道了一个具有过电压保护功能的电路模型,当控制参数  $c$  从 1 开始变小时,系统由连续保守系统向分段连续半耗散系统转变,原来稳定、保守的混沌海转变为瞬态混沌,规则吸引子与周期耗散吸引子共存于系统的相平面内。随着控制参数  $c$  的不断减小,瞬态混沌的测度越来越小,迭代在瞬态混沌中的特征时间随控制参数  $c$  按指数函数关系变化,这个定量函数关系描述了系统由连续保守系统向分段连续半耗散系统转变的动力学特性。

### 1 模 型

图 1 是一个带有耗散性元件的过电压保护电路模型。电流源  $I_1$ 、 $I_2$  与电阻  $R$  并联在电容器  $C$  的两端,且  $I_1 \gg I_2$ 。图中  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  为可控电子开关,  $U_c$  表示电容  $C$  两端的电压。①当  $K_1$  闭合,  $K_2$ 、 $K_3$  断开,电流源  $I_1$  对电容  $C$  充电,  $U_c$  增大;②当  $U_c$  达到某个上阈值  $U_{th+}$  且不超过一个常量  $E$  时,  $K_1$  断开,  $K_2$  合上,  $K_3$  接通电流源  $I_2$  放电;③若  $U_c$  超过  $E$ , 则强迫  $U_c$  取  $E$  值,  $K_3$  接通电阻  $R$  缓慢放电;④当  $U_c$  达到某个下阈值  $U_{th-}$  时,  $K_1$  合上,  $K_2$ 、 $K_3$  断开,电容  $C$  再回到充电状态。如此不停反复地对电容  $C$  进行充电与放电。该电路模型的动力学行为可由一个分段连续映象描述<sup>[9]</sup>:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{1x} = x_n + y_{n+1} + \frac{a}{b} \\ y_{n+1} = g_{1y} = y_n - \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad x_n \notin F \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{2x} = x_n + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+cd}{1-ad-bdy_n} \\ y_{n+1} = g_{2y} = y_n + 2x_n \end{cases} \quad x_n \in F \quad (2)$$

其中  $F = [x_{F1}, x_{F2}] = [0.5 + \frac{\arcsin(c)}{2\pi}, 1 - \frac{\arcsin(c)}{2\pi}]$  为电压保护区,  $c \in [0, 1]$ 。在本文讨论中取  $a = 2.00$ ,  $b = 1.35$ ,  $d = 0.20$ ,  $c$  为控制参数。

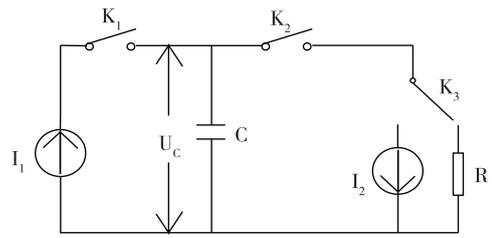


图 1 具有过电压保护的电路

Fig.1 The circuit with over voltage protection

映象方程(1)与(2)的 Jacobian 矩阵为:

$$J_1 = \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\pi}{b} \cos(2\pi x_n) & 1 \\ -\frac{2\pi}{b} \cos(2\pi x_n) & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$J_2 = \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{bd}{2\pi(1-ad-bdy_n)} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

由(3)与(4)可得出:  $\det J_1 = 1$ 、 $\det J_2 < 1$ , 因而映象(1)与(2)分别是保守映象与耗散映象。(1)与(2)的逆映象为:

$$\begin{cases} x_n = g_{1x}^{-1} = x_{n+1} - y_{n+1} - \frac{a}{b} \\ y_n = g_{1y}^{-1} = y_{n+1} + \frac{1}{b} \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad x_n \notin F \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_n = g_{2x}^{-1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{2} \\ y_n = g_{2y}^{-1} = y_{n+1} - 2x_{n+1} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+cd}{1-ad-bdy_n} \end{cases} \quad x_n \in F \quad (6)$$

一个  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  可能存在 2 个分别由(5)与(6)式决定的逆映象点  $(x_n, y_n)$ , 因而系统具有不可逆性, 可以展现由不可逆性导致的类耗散性。而映象(2)是耗散映象, 因此由映象(1)与(2)不可逆耦合而成的分段连续系统是半耗散系统。

### 2 系统动力学行为的转变

当控制参数  $c = 1$  时,  $F = [x_{F1}, x_{F2}] = [0.5 + \frac{\arcsin(c)}{2\pi}, 1 - \frac{\arcsin(c)}{2\pi}] = [0.75, 0.75]$ , 即电压保护区的相面积为 0, 映象(2)的定义域是空集, 此时系统的动力学行为仅仅由保守映象(1)描述, 因而它是一个连续保守系统。图 2 是  $c = 1$  时系统的相平

面,此时椭圆岛轨道(位于图中 2 个灰色方框内)完全浸没在混沌海之中,图 3 是图 2 中左上角灰色方框内区域的放大。图 2 的画法是:在  $x \in [0.12, 0.18], y \in [0.74, 0.86]$  的相平面范围内均匀选取  $10 \times 10$  个初值,每个初值迭代 50 000 次,去除前 49 000 次迭代,保存最后 1 000 次迭代数据。在整个相平面内,无论选取多少个初值,画出的相图均与图 2 完全相同,选取  $x \in [0.12, 0.18], y \in [0.74, 0.86]$  范围,仅仅是为了能清晰地观察到椭圆岛。从图 2 中可以看出,椭圆岛被混沌海包围。由于映象(1)是一个可逆映象,任何一个点都只有一个由逆映象(5)决定的逆象,由 KAM 定理可知在椭圆岛上迭代点的逆象一定还在椭圆岛上,因而椭圆岛与混沌海之间没有交集,混沌海上的迭代始终在混沌海内随机漫游,不会逃逸到椭圆岛上,此时的椭圆岛不再是规则吸引子,因此在迭代过程中系统的相平面不会发生塌缩,这是保守系统的典型动力学特征。

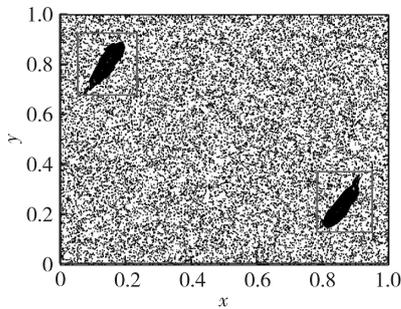


图 2  $c = 1$  时系统的相平面  
Fig.2 The phase plane of the system when  $c = 1$

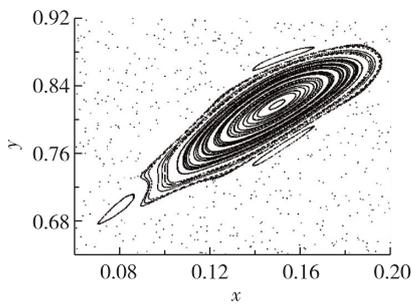


图 3 图 2 中左上角灰色方框内区域的放大  
Fig.3 The magnified area in grey box in the upper left corner of Fig. 2

当  $c < 1$  时,电压保护区的面积不再为 0,映象(2)的定义域不再是空集,此时的系统是由映象(1)与(2)不可逆耦合而成的分段连续半耗散系统,而映象(2)是一个耗散映象,所以系统不仅可以展现不可逆性导致的类耗散性,还可以展现耗散映象(2)导致的传统耗散性,以及两者混合导致的“混合耗散性”。

图 4 是  $c = 0.99$  时系统的相平面,该图的画法是:在  $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$  的相平面范围内均匀选取  $10 \times 10$  个初值,每个初值迭代 50 000 次,去除前 49 000 次迭代,保存最后 1 000 次迭代数据。用 1、2 表示的是两个耗散吸引子,它们构成一个二周期轨道,用 A 表示的是规则吸引子,它们是周期椭圆岛,此时耗散吸引子和规则吸引子共存于系统的相平面内,这是半耗散系统的特征相平面,此时系统已转变为分段连续半耗散系统。

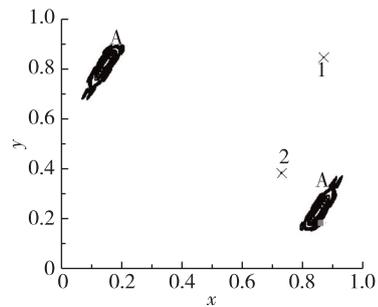


图 4  $c = 0.99$  时系统的相平面  
Fig.4 The phase plane of the system when  $c = 0.99$

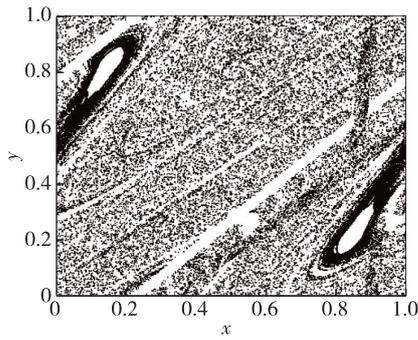
### 3 向分段连续半耗散转变的动力学特性

当  $c$  从 1 开始减小,系统由连续保守系统转变为分段连续半耗散系统,由于混合耗散性的作用,从相平面任意点出发的迭代最终会逃逸到规则吸引子或耗散吸引子上,图 2 中的混沌海转变为瞬态混沌。像映象(1)与(2)不可逆耦合的这样一类分段连续系统,它们的相平面上存在着迭代禁区<sup>[5]</sup>。图 5 中的空白区域就是该半耗散系统的迭代禁区,它是一个禁止迭代的肥分形。图 5 的画法是:在  $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$  的相平面范围内均匀选取  $10 \times 10$  个初值,每个初值迭代 50 000 次,保存 50 000 次迭代数据。如图 5 所示,随着控制参数  $c$  的不断减小,肥分形所占据的相平面区域逐渐变大,它的测度也逐渐变大,而瞬态混沌的测度逐渐变小,瞬态混沌的点子逐渐变稀疏,这描述了系统由连续保守向分段连续半耗散转变的动力学特性。

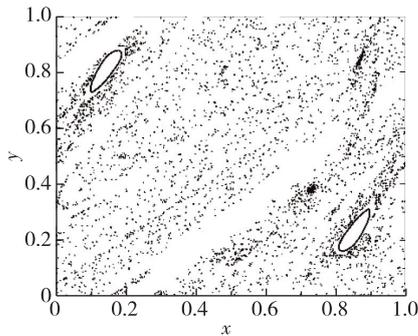
瞬态混沌测度的大小与迭代在瞬态混沌中的特征时间  $\langle \tau \rangle$  密切联系,  $\langle \tau \rangle$  可定义为:

$$\langle \tau \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} \tag{7}$$

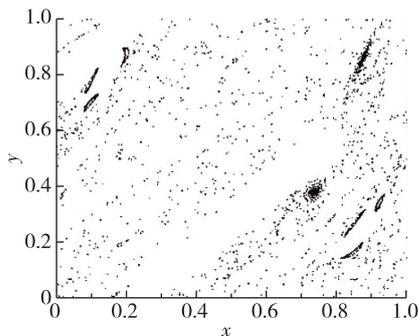
式中:  $n$  为在  $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$  的相平面内均



(a)  $c = 0.98$  时系统的相平面



(b)  $c = 0.96$  时系统的相平面



(c)  $c = 0.91$  时系统的相平面

图5 系统的相平面

Fig.5 The phase plane of the system

匀选取的初值个数,  $N_i$  为从第  $i$  个初值出发进入系统吸引子之前的迭代步数。图 6 显示了计算结果, 计算方法是: 在  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$  的相平面内均匀选取  $300 \times 300$  个初始计算得到, 控制参数  $c$  的计算范围为  $0.870 - 0.998$ ,  $c_0 = 1$ 。该图显示的函数关系为:

$$\ln\langle\tau\rangle = -\nu\ln(c - c_0) \quad (8)$$

式中  $\nu = 1.85 \pm 0.02$ 。图中的计算结果表明迭代在瞬态混沌中的特征时间随参数按指数函数关系变化。

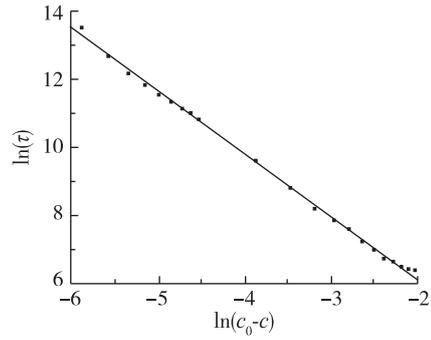


图6 特征时间  $\langle\tau\rangle$  的标度律

Fig.6 The scaling law of the feature time  $\langle\tau\rangle$

## 4 结 论

研究了具有过电压保护的电路模型, 系统在一定的参数组合下, 可以展示由连续保守动力学行为向分段连续半耗散动力学行为转变。这种转变特性可以用迭代在瞬态混沌中的特征时间  $\tau$  与控制参数  $c$  之间的指数函数关系来描述。

## 参考文献:

- [1] MARIUS F DANCA. Chaos suppression via period pulses in a class of piece-wise continuous systems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64: 849-855.
- [2] 巢小刚, 岳明, 沈小鹏. 一个半耗散系统中的吸引子[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2012, 24(2): 75-78.
- [3] 屈世显, CHRISTIAN SEN B, 何大韧. 一个不连续不可逆映象中的新型激发[J]. 物理学报, 1995, 44(6): 841-852.
- [4] 吴顺光, 丁晓玲, 何大韧. 一类分段光滑映象中有新特征的激发[J]. 物理学报, 1999, 48(12): 2180-2185.
- [5] WANG J, DING X L, HU B B, et al. Characteristics of a Piecewise Smooth Area-Perserving Map[J]. Phys Rev E, 2001, 64: 1-9.
- [6] WANG X M, WANG Y M, ZHANG K, et al. A Quasi-crisis in a quasia-dissipative system[J]. Eur Phys J D, 2002, 19: 119-124.
- [7] JIANG Y M, LU Y Q, HE D R, et al. A crisis of a stochastic web[J]. Eur Phys J D, 2004, 29: 285-292.
- [8] SHEN Y, DAI J, JIANG Y M, et al. A fat fractal crisis in a quasi-dissipative system[J]. Phys Lett A, 2006, 348: 279-283.
- [9] CHAO X G, DAI J, WANG W X, et al. A semi-dissipative crisis[J]. Eur Phys J D, 2006, 40: 423-430.

(责任编辑: 李艳)