第 27 卷 第 4 期
2015 年 10 月

常州大学学报(自然科学版)
Journal of Changzhou University(Natural Science Edition)

Vol. 27 No. 4
Oct. 2015

文章编号:2095－0411(2015)04-0113-03

混合正、负阶 KdV-mKdV 方程精确解

陈冬冬,刘玉清
(常州大学 数理学院,江苏 常州 213164)

摘要:负阶 KdV 方程与著名的 Camassa-Holm 方程以及一些高维非线性发展方程有着紧密的联系,同时负阶 KdV 方程本身往往还具有一些特殊性质比如具有显式弱解。因此负阶方程具有重要的数学和物理价值。本文提出混合正、负阶 KdV-mKdV 方程,是对负阶 KdV 方程的一种推广,该方程有许多性质有待研究。通过行波约化,求得方程的精确解是其中一个重要部分。得到了孤子解,三角函数解等形式的解,了解了正、负阶方程共同作用的方式。

关键词:混合正、负阶 KdV-mKdV 方程;行波约化;精确解;孤子解;三角函数解
中图分类号:O 175.23　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.3969/j.issn.2095－0411.2015.04.021

Exact Solutions to A Mixed Positive-Negative KdV-mKdV Equation

CHEN Dongdong, LIU Yuqing
(School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Negative KdV equation closely relates to celebrated Camassa-Holm equation and some high dimensional nonlinear evolution equations. In the mean time negative KdV equation itself possess special properties such as explicit weak solution. So negative equations have significant mathematical and physical values. A mixed positive-negative KdV-mKdV equation is proposed in this paper, which is a generalization of negative KdV equation, for which there are several aspects to be researched. Finding its exact solutions through the reduction of traveling wave method is an important part. Some exact solutions such as soliton solutions and triangle function solutions are obtained and the combined action model of positive and negative equations is found then.

Key words: mixed positive-negative KdV-mKdV equation; reduction of traveling wave method; exact solutions; soliton solutions; triangle function solutions

1　KdV 方程介绍

KdV 方程是 1895 年由 Korteweg 和 deVries 导出的著名方程。长期以来对各种耦合 KdV 方程[1-4]、变系数 KdV 方程[5-6]等等冠以 KdV 方程名称的非线性演化方程的研究一直没有中断。齐次平衡法,Tanh 函数法,Darboux 变换法,双线性导数法,反散射变换法[7-8]等方法被用于对此类方程进行研究。一些重要的结果比如:无穷守恒律[8],Miura 变换[8],Crum 定理[9],方程与 Toda 链方程的关系[10-11]相继被发现。可以说,KdV 方程的研究是孤立子理论研究的一个缩影。广义 KdV 方程中 KdV-mKdV 混合方程($u=u(x,t)$),足标表示对相应变量求偏导数)

收稿日期:2015-01-18。
作者简介:陈冬冬(1992—),男,江苏连云港人。指导教师:刘玉清(1966—),男,副教授,E-mail:yqmaiL321@163.com

$$u_t = u_{xxx} + 6(uu_x + u^2 u_x) \tag{1}$$

因兼具 KdV 方程和 mKdV 方程的特点而受到重视。它由广义 KdV 算子

$$S = \partial_x^2 + 4u(1+u) + 2u_x \partial_x^{-1}(1+2u) \tag{2}$$

其中 ∂_x^{-1} 定义为

$$\partial_x^{-1} = \frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{x} - \int_{x}^{\infty}) \tag{3}$$

作用得到：

$$u_t = Su_x$$

广义 KdV 算子 $S = \partial_x^2 + 4u(\alpha + \beta u) + 2u_x \partial_x^{-1}(\alpha + 2\beta u)$ 当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时化简为 KdV 算子 T，而当 $\alpha = 0, \beta = 1$ 时化简为 mKdV 算子。

近来，对负阶 KdV 方程的讨论引发了研究者的兴趣。文献[12]讨论了负阶 KdV 方程族，求出了一族方程的孤子解和有理解。文献[13]讨论了负阶 KdV-mKdV 方程，求出了 Wronskian 解。负阶 KdV 方程族由下式表示[12]：

$$u_t = -2b_{n,x} \tag{4}$$

$$Tb_{j,x} = 4b_{j-1,x}, j = 0,1,\cdots,n, (b_{-1} = 0) \tag{5}$$

其中 $T = \partial_x^2 + 4u + 2u_x \partial_x^{-1}$ 是 KdV 算子。负阶 KdV-mKdV 方程则通过广义 KdV 算子 S 作用到方程左边得到：

$$u_{txx} + 4u(\alpha + \beta u)u_t + 2u_x \partial_x^{-1}(\alpha + 2\beta u)u_t = u_x \tag{6}$$

本文中考虑算子 S 在方程两边均有作用的情况，即所谓混合正、负阶方程。这种类型的方程早在 1983 年就有作者提出[14]，但一直缺乏进一步的研究。通过行波约化，我们将给出这种混合正、负阶 KdV-mKdV 方程的孤子解。

2 混合正、负阶 KdV-mKdV 方程

混合正、负阶 KdV-mKdV 方程的形式是：

$$u_t = \sigma S u_x + \tau v_x \tag{7}$$

$$S v_x = u_x \tag{8}$$

其中 S 就是由(5)定义的积微分算子，α,β,σ,τ 均为常数。若 $\sigma = 1, \tau = 0$，对应的方程是 KdV-mKdV 方程。若 $\sigma = 0, \tau = 1$，将算子 S 对(7)两边作用，得：

$$Su_t = u_x \tag{9}$$

该方程也是文献[13]讨论的方程(6)。

设 $u = u(\xi), v = v(\xi), \xi = x + \omega t$，，其中 ω 为常数。同时假设函数 u, v 在无穷远处衰减为零。下面按照[15](第一章第 4 节)的方法来统一构造非线性演化方程的诸多精确解。假设

$$u = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi^i, v = \sum_{i=0}^{n} b_i \varphi^i, \varphi'^2 = \sum_{i=0}^{r} c_i \varphi^i \tag{10}$$

在方程(7)、(8)中平衡最高级导数项与非线性项，可以取 $m=1, n=3, r=4$. 先对方程(7)、(8)两边关于 x 积分一次，再把(10)代入，比较 φ 的各次幂的系数让其相等，得到一组解

$$c_4 = -\beta a_1^2, c_3 = c_1 = 0, b_3 = b_2 = 0, a_0 = -\frac{\alpha}{2\beta},$$

其中 a_1 为任意常数，而 c_0, c_2, b_1 满足关系(其中 b_0 是任意常数)。

$$b_1 c_2 - \frac{\alpha^2}{\beta} b_1 = a_1(1 - 2\alpha b_0) \tag{11}$$

$$\omega a_1 = \sigma a_1 (c_2 - \frac{3\alpha^2}{2\beta}) + \tau b_1 \tag{12}$$

$$\omega a_0 = \frac{\sigma \alpha^3}{2\beta^2} + \tau b_0 \tag{13}$$

特别，取 $b_0 = \frac{1}{3\alpha}$，则可得 $c_2 = \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{2\tau\beta}{3\sigma\alpha^2}, b_1 = -\frac{\sigma\alpha^2 a_1}{2\tau\beta}$；或 $c_2 = \frac{\alpha^2}{2\beta}, b_1 = -\frac{2\beta a_1}{3\alpha^2}$。此时，$\omega = -\frac{\sigma\alpha^2}{\beta} - \frac{2\tau\beta}{3\alpha^2}$。于是，可以得到如下解[14]。

若 $\beta > 0$，此时，$c_4 < 0$，取 $c_0 = 0$，对 $c_2 = \frac{\alpha^2}{2\beta}$ 有钟状孤子解

$$u = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\beta} \operatorname{sech}(\frac{\sqrt{2}\alpha}{2\sqrt{\beta}}\xi) \tag{14}$$

对 $c_2 = \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{2\tau\beta}{3\sigma\alpha^2}$，当 $3\alpha^4 > 2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2$ 时，有钟状孤子解

$$u = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{3\alpha^4 - 2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{3}\alpha\beta} \operatorname{sech}(\sqrt{\frac{3\alpha^4 - 2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}{3\beta\alpha^2}}\xi) \tag{15}$$

若 $\beta < 0$，此时，$c_4 > 0$，对 $c_2 = \frac{\alpha^2}{2\beta}$，取 $c_0 = 0$，有三角函数解

$$u = \frac{-\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\beta} \sec(\frac{\sqrt{2}\alpha}{2\sqrt{-\beta}}\zeta) \tag{16}$$

取 $c_0 = \frac{c_2^2}{4c_4}$ 有扭状孤子解

$$u = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\alpha}{2\beta} \tanh(\frac{\alpha}{2\sqrt{-\beta}}\xi) \tag{17}$$

对 $c_2 = \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{2\tau\beta}{3\sigma\alpha^2}$，取 $c_0 = 0$，当 $3\alpha^4 > 2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2$ 时，有三角函数解

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{\sqrt{3\alpha^4-2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{3}\alpha\beta}\sec\left(\frac{\sqrt{3\alpha^4-2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{-3\beta}\alpha}\xi\right) \tag{18}$$

当 $3\sigma\alpha^4=2\tau\beta^2$ 时，有有理解

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{1}{\sqrt{-\beta}\xi} \tag{19}$$

取 $c_0=\frac{c_2^2}{4c_4}$，当 $3\alpha^4<2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2$ 时，有扭状孤子解

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{\sqrt{-3\alpha^4+2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{6}\alpha\beta}\tanh\left(\frac{\sqrt{-3\alpha^4+2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{-6\beta}\alpha}\xi\right) \tag{20}$$

当 $3\alpha^4>2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2$ 时，有三角函数解

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{\sqrt{3\alpha^4-2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{6}\alpha\beta}\tan\left(\frac{\sqrt{3\alpha^4-2\frac{\tau}{\sigma}\beta^2}}{\sqrt{-6\beta}\alpha}\xi\right) \tag{21}$$

特别，关注对应着 $c_2=\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{2\tau\beta}{3\sigma\alpha^2}$，$b_1=-\frac{\sigma\alpha^2a_1}{2\tau\beta}$ 的解发现，正、负阶方程起的作用体现在量 $\frac{\tau}{\sigma}$ 上，解的形式与不含负阶方程时得到的形式一样[14]。还要说明的是，如果保留 b_0 为任意值，可以使 c_2 含有参数，能扩大并调整其取值范围。

3 结　论

考虑了混合正、负阶 KdV-mKdV 方程，通过行波约化得到了方程的精确解。从表达式可以看到，正、负阶方程对应的部分（σ 和 τ 部分）对解的影响体现为共同作用，即由量 $\frac{\tau}{\sigma}$ 来刻画。解的形式与不含负阶方程（即仅为 KdV-mKdV 方程）时得到的形式一致，说明了这一性质与负阶方程与原始方程的同源性有关。

参考文献：

[1]YAN Q Y，ZHANG Y F. New periodic solutions to a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system [J]. Chinese Physics：B，2003，12：131-135.

[2]SHEN J W，XU W，XU Y. Travelling wave solutions in the generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system[J]. Applied Mathematics and Computation，2004，161：365-383.

[3]HUANG Y H，WU H X，XIE X，et al. On Coupled KdV equations with self-consistent sources[J]. Commucations in theoretical physics，2008，49：1091-1100.

[4]YAN Z Y. The （2＋1）-dimensional integrable coupling of KdV equation：auto-bäcklund transformation and new non-traveling wave profiles[J]. Physics Letters A，2005，345：362-377.

[5]DAI H H. A Jeffrey，The inverse scattering transforms for certain types of variable coefficient KdV equations[J]. Physics Letters A，1989，139：369-372.

[6] FAN E G. Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for general variable coefficient KdV equations[J]. Physics Letters A，2002，294：26-30.

[7]楼森岳，唐晓艳.非线性数学物理方法[M]. 北京：科学出版社，2006.

[8]陈登远.孤子引论[M]. 北京：科学出版社，2006.

[9]NIMMO J J C. The Crum transformation for a third-order scattering problem [J]. Proceedings of the Royal Society London A，1990，431：361-369.

[10]GIESEKER D. The Toda Hierarchy and the KdV hierarchy[J]. Communcation in Mathematical Physics，1996，181：587-603.

[11]ZENG Y B，LIN R L，CAO X. The relation between the toda hierarchy and the KdV hierarchy[J]. Physics Letters A，1999，251：177-183.

[12]LIU Y Q，CHEN D Y，HU C. The generalized wronskian solutions of inverse KdV hierarchy[J]. Applied Mathematics and Computation ，2011，218：2015-2035.

[13]LIU Y Q，CHEN D Y，HU C. The generalized Wronskian solution to a negative KdV-mKdV equation[J]. Chinese physics letters，2012，29：080202.

[14]CHEN D Y，ZENG Y B. New nonlinear evolution equations associated with energy-Ddependent potentials eigenvalue problems [J]. 中国科技大学报，1983，13：293-300.

[15]范恩贵.可积系统与计算机代数[M]. 北京：科学出版社，2004.

（责任编辑：李艳）