

文章编号:2095-0411(2015)01-0083-05

## 面向平面划线的二自由度并联机构动力学分析

邓嘉鸣, 佟 祯, 秦 娴, 蒋永健  
(常州大学 机械工程学院, 江苏 常州 213164)

**摘要:**针对传统手工划线精度差、工效低、劳动强度大等缺点,提出了一种简单实用用于平面划线执行机构的二自由度并联机构,采用拉格朗日法建立了机构的动力学模型,推导了机构动力学方程;以工业排风扇叶片划线为应用背景,拟合了叶片得边界曲线方程,并运用 Matlab 软件仿真得出机构末端执行点(划线头)作叶片轨迹运动时机构动力学变化规律;得出该二自由度并联机构动力学性能较好,同时由于机构自由度少、结构简单、易于控制等特点,因而适合于曲率半径较大的曲线或者直线形状零件的划线作业。

**关键词:**划线机;并联机构;动力学分析;拉格朗日方程

**中图分类号:** TH 112

**文献标志码:** A

**doi:** 10. 3969/j. issn. 2095-0411. 2016. 01. 016

## Dynamic Analysis of Parallel Mechanisms with Two-DOF on the Plane Scraper

DENG Jiaming, TONG Zhen, QIN Xian, JIANG Yongjian

(School of Mechanical Engineering, Changzhou university, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** In view of the drawbacks existing in traditional manual scribing such as poor accuracy, low efficiency, large labor intensity, etc. A 2-DOF parallel mechanism is proposed to be used in the actuator for plane scraper. Based on the Lagrange equation, the dynamic equation of the mechanism is derived. Some curve equations were fitted based on industrial exhaust fan blade scribing. The dynamics is established that the terminal operating point finished this curve track by using Matlab. It is concluded that the 2-DOF parallel mechanism has good dynamic performance, and because of its less degree of freedom, simple structure and easy control, it is suitable for marking assignments that have curve with large radius or parts with straight shape.

**Key words:** scraper; parallel mechanism; kinematics analysis; Lagrange equation

在我国机械加工行业,所采用的划线工艺大多是传统的手工划线。手工划线工艺的劳动强度较大,划线的工效、准确度也极易受划线操作人员工作态度、情绪等人为因素的影响。

目前,已有文献<sup>[1]</sup>报道处于实验阶段的三坐标划线机不仅能代替传统的手工划线与测量作

业,而且操作时往往只需一次或两次装卡便可完成对工件的测量与划线。XYZ 直角式串联机构虽然工作可靠、控制也较简单,但由于串联机构具有刚度低、运动惯量大,且易产生位置积累误差等缺点,因而常常会出现较大的控制误差。与串联机构相比,并联机构具有精度高、刚度大、承载能力

收稿日期:2015-12-29。

基金项目:国家自然科学基金项目资助(51075045)。

作者简介:邓嘉鸣(1963—),男,江苏常州人,硕士,副教授,主要从事机械设计、并联运动机械研究。

大等特性,所以在制造领域得到日益广泛的重视<sup>[2]</sup>。

鉴于此,本文提出一种实用的 2 自由度并联机构作为平面划线机的执行机构。该机构具有自由度少、结构简单、易控制、刚性好等特点,因而具有良好的运动学、动力学性能,且由于自由度少,所以末端划线头的运动轨迹更易控制,从而更易保证平面划线的精度。本文通过建立机构动力学模型进而分析动力学性能,推导出了两输入构件驱动力的变化规律,为后期驱动电机的选型及样机研制提供理论依据。

### 1 并联机构的组成及其工作原理

并联机构如图 1 所示,该机构由 2 个转块 A 和 B、2 个可调长度连杆 PC、PD(为 2 个主动输入构件)、组合在两连杆接触点 P 上的 Z 方向末端划线头、机架(兼作划线工作平台)等组成。2 个转块与机架间通过转动副相连,并分别与 2 个主动输入连杆通过移动副相连,同时 2 个输入连杆通过转动副在 P 点相连,由此构成一少自由度并联机构(置于 xoy 坐标平面内,转块旋转中心分别距 y 轴为  $S_a$  和  $S_b$ )。工作时,2 个转块的旋转中心在 y 方向上距离为 H,输入构件 PC 和 PD 在外加驱动电机的驱使下可按要求在两转块中穿行(穿行轨迹始终通过转块旋转中心),即杆段 PA、PB 的长度不断发生变化(两转块也分别随之转动),从而驱使两输入连杆接触点 P 上的 Z 方向末端划线头在 xoy 平面内作任意曲线运动。同时,只要 H、PA、PB 的长度足够长,理论上可完成任意大尺寸工件的划线工作。

### 2 机构动力学模型的建立

建立平面直角坐标系 xoy,如图 1 所示。分析机构动力学性能时,需考虑多构件的能量变化,所以首先定义各构件的质量及转动惯量。不访设输入构件 PD、PC 的长度分别为  $l_1$ 、 $l_2$ ,质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ;各构件均质,且几何形状规则,即质心位置分别位于各构件的几何中心,各为  $s_1$ 、 $s_2$ 。两输入构件 PD、PC 分别绕转块中心 A、B 的转动惯量为  $J_1$ 、 $J_2$ ,且两构件分别与 x 轴的夹角为转角为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 。

### 3 机构动力学分析

由机构动力学建模,建立机械系统动力学方程的原理与方法主要有:牛顿第二定律、达朗贝尔原理、拉格朗日方程、凯恩方程、影响系数法和传递矩

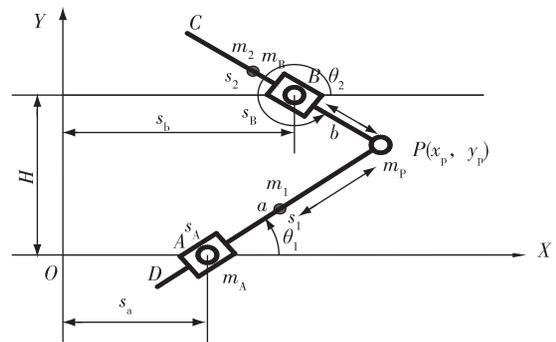


图 1 并联机构简图

Fig.1 Diagram of Parallel mechanism

阵法等。其中拉格朗日法以系统的动能和势能为基础建立动力学方程,免去了机构真实的运动分析,因而推导过程相对简单,且能得到形式较为简洁的动力学方程,在机构建模中得到广泛应用<sup>[3]</sup>。为此,本文采用拉格朗日法对机构进行动力学建模,具体表达式如下<sup>[4]</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

式中:  $q_r$  为第  $r$  个广义坐标;  $E$  为系统动能;  $U$  为系统的势能;  $Q_r$  为对第  $r$  个广义坐标的广义力矩。

对于  $N$  个自由度的系统有  $N$  个广义坐标,也相应地有  $N$  个方程,系统的独立运动方程数与自由度相同,式(1)也可表示为:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_r} \right] - \left[ \frac{\partial E}{\partial q_r} \right] + \left[ \frac{\partial U}{\partial q_r} \right] = Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

由于该机构自由度数为 2,因此可选择 PA、PB 的长度为广义坐标,即选择  $a$ 、 $b$  分别为广义坐标  $q_1$  和  $q_2$ 。由图 1 可得出并联机构的独立向量环方程如下:

$$\begin{cases} (x - s_a)^2 + y^2 = q_1^2 \\ (x - s_b)^2 + (H - y)^2 = q_2^2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} H + q_2 \sin \theta_2 = q_1 \sin \theta_1 \\ s_b + q_2 \cos \theta_2 = s_a + q_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (4)$$

为求速度,将式(3)、(4)对时间  $t$  求导:

$$\begin{cases} (x - s_a) \dot{x} + y \dot{y} = q_1 \dot{q}_1 \\ (x - s_b) \dot{x} - (H - y) \dot{y} = q_2 \dot{q}_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2 q_2 \cos \theta_2 = \dot{q}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 q_1 \cos \theta_1 \\ \dot{q}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2 q_2 \sin \theta_2 = \dot{q}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 q_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (6)$$

得出  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = u_x^{(1)} \dot{q}_1 + u_x^{(2)} \dot{q}_2 \\ \dot{y} = u_y^{(1)} \dot{q}_1 + u_y^{(2)} \dot{q}_2 \end{cases}, \begin{cases} \dot{\theta}_1 = u_{\theta_1}^{(1)} \dot{q}_1 + u_{\theta_1}^{(2)} \dot{q}_2 \\ \dot{\theta}_2 = u_{\theta_2}^{(1)} \dot{q}_1 + u_{\theta_2}^{(2)} \dot{q}_2 \end{cases}$$

$u_k^{(1)}, u_k^{(2)} (k=x, y, \theta_1, \theta_2)$  即为  $x, y, \theta_1, \theta_2$  对广义坐标  $q_1, q_2$  的偏类速度。式中偏类速度为:

$$\begin{cases} u_{\theta_1}^{(1)} = \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_1)}{q_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ u_{\theta_1}^{(2)} = \frac{1}{q_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ u_{\theta_2}^{(1)} = \frac{-1}{q_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ u_{\theta_2}^{(2)} = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{q_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \end{cases} \quad (7)$$

设各构件质心  $s_i$  的坐标为  $(x_i, y_i)$ , 则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{l_1(x - s_a)}{2q_1} \\ y - \frac{yl_1}{2q_1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{l_2(x - s_b)}{2q_2} \\ y + \frac{l_2(H - y)}{2q_2} \end{bmatrix}$$

设输入构件 PD、PC 的质心速度分别为  $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T$ , 划线头划线速度为  $(\dot{x}, \dot{y})^T$ 。将式(8)对时间  $t$  求导一次得:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_1}^{(1)} \dot{q}_1 + u_{x_1}^{(2)} \dot{q}_2 \\ u_{y_1}^{(1)} \dot{q}_1 + u_{y_1}^{(2)} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_2}^{(1)} \dot{q}_1 + u_{x_2}^{(2)} \dot{q}_2 \\ u_{y_2}^{(1)} \dot{q}_1 + u_{y_2}^{(2)} \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

本研究中机构为平面机构,同时按平面划线的要求,机构均布置在同一水平面内,即各构件在其运动过程中势能均不变,所以在能量方程中可忽略机构的势能<sup>[5]</sup>。则系统的总能量即为系统的动能,用偏类速度表示的系统动能表达式:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left\{ m_j \left( \sum_{i=1}^m (u_{x_j}^{(i)} \dot{q}_i)^2 + \sum_{i=1}^m (u_{y_j}^{(i)} \dot{q}_i)^2 \right) + J_j \sum_{i=1}^m (u_{\theta_j}^{(i)} \dot{q}_i)^2 \right\} \quad (10)$$

化简可得系统的动能为

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + J_i \dot{\theta}_i^2] = \frac{1}{2} J_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_{22} \dot{q}_2^2 + J_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (11)$$

式中:

$$\begin{cases} J_{11} = \sum_{i=1}^2 \{ m_i [(u_{x_i}^{(1)})^2 + (u_{y_i}^{(1)})^2] + J_i (u_{\theta_i}^{(1)})^2 \} \\ J_{22} = \sum_{i=1}^2 \{ m_i [(u_{x_i}^{(2)})^2 + (u_{y_i}^{(2)})^2] + J_i (u_{\theta_i}^{(2)})^2 \} \\ J_{12} = \sum_{i=1}^2 [m_i (u_{x_i}^{(1)} u_{x_i}^{(2)} + u_{y_i}^{(1)} u_{y_i}^{(2)}) + J_i u_{\theta_i}^{(1)} u_{\theta_i}^{(2)}] \end{cases} \quad (12)$$

$J_{11}, J_{22}, J_{12}$  也称为等效转动惯量。其中:

$$\begin{cases} u_{x_1}^{(1)} = \left(1 - \frac{l_1}{2q_1}\right) u_x^{(1)} + \frac{l_1}{2q_1^2} x \\ u_{x_1}^{(2)} = \left(1 - \frac{l_1}{2q_1}\right) u_x^{(2)} \\ u_{y_1}^{(1)} = \left(1 - \frac{l_1}{2q_1}\right) u_y^{(1)} + \frac{l_1}{2q_1^2} y \\ u_{y_1}^{(2)} = \left(1 - \frac{l_1}{2q_1}\right) u_y^{(2)} \\ u_{x_2}^{(1)} = \left(1 - \frac{l_2}{2q_2}\right) u_x^{(1)} \\ u_{x_2}^{(2)} = \left(1 - \frac{l_2}{2q_2}\right) u_x^{(2)} + \frac{l_2}{2q_2^2} x \\ u_{y_2}^{(1)} = \left(1 - \frac{l_2}{2q_2}\right) u_y^{(1)} \\ u_{y_2}^{(2)} = \left(1 - \frac{l_2}{2q_2}\right) u_y^{(2)} + \frac{l_2 y}{2q_2^2} - \frac{l_2 H}{2q_2^2} \\ u_{\theta_1}^{(1)} = \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_1)}{q_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ u_{\theta_1}^{(2)} = \frac{1}{q_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ u_{\theta_2}^{(1)} = \frac{-1}{q_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ u_{\theta_2}^{(2)} = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{q_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 + m_1 \left[ \frac{l_1 x_1}{2(x - x_1)} \right]^2 \\ J_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + m_2 \left[ \frac{l_2 x_2}{2(x - x_2)} \right]^2 \end{cases} \quad (13)$$

式(13)是建立动力学方程所需要的所有构件的偏类速度。将式(11)、(12)代入拉氏方程,可得

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = J_{11} \dot{q}_1 + J_{12} \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = J_{12} \dot{q}_1 + J_{22} \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) = J_{11} \ddot{q}_1 + \frac{\partial J_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial J_{11}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + J_{12} \ddot{q}_2 +$$

$$\frac{\partial J_{12}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial q_2} \dot{q}_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) = J_{12} \ddot{q}_1 + \frac{\partial J_{12}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + J_{22} \ddot{q}_2 +$$

$$\frac{\partial J_{22}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial J_{22}}{\partial q_2} \dot{q}_2^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial q_1} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial q_2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

即可得到系统的动力学方程:

$$\begin{cases} J_{11} \ddot{q}_1 + J_{12} \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 + \left( \frac{\partial J_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial J_{11}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 = Q_1 \\ J_{12} \ddot{q}_1 + J_{22} \ddot{q}_2 + \left( \frac{\partial J_{12}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 = Q_2 \end{cases}$$

### 4 机构动力学仿真

本文以金环冠球 16 寸工业排风扇叶片(如图 2 所示)划线为研究对象,按叶片外形测得的坐标拟合相应的叶片曲线。

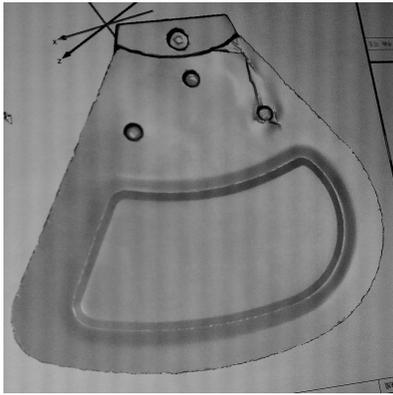


图 2 叶片实物图  
Fig.2 Picture of vane

图 3 所示是三坐标测量机测得的叶片边界点坐标,图 4 是叶片边界实际曲线与拟合曲线的对比,可以看出拟合出的曲线与实际曲线基本吻合,可以用拟合曲线代替实际曲线进行分析。

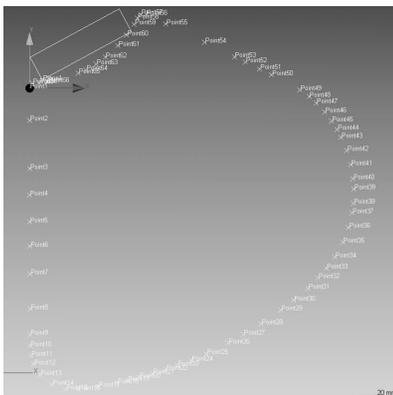


图 3 测得的点坐标  
Fig.3 The measured point coordinates

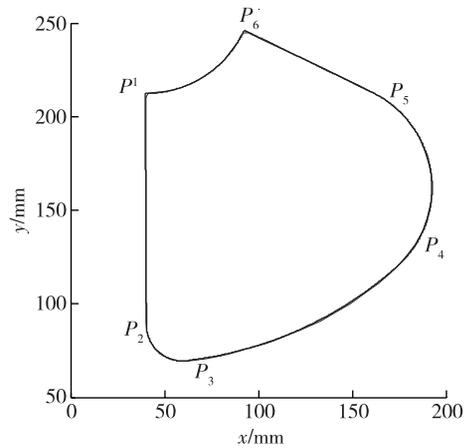


图 4 叶片边界实际曲线与拟合曲线的对比

Fig.4 Comparison of the actual blade boundary curve and fitting curve

通过拟合可知拟合曲线由直线段  $P_1 P_2$ 、圆弧段  $P_2 P_3$ 、圆弧段  $P_3 P_4$ 、圆弧段  $P_4 P_5$ 、直线段  $P_5 P_6$  和圆弧段  $P_6 P_1$  组合而成。取  $L_1=L_2=400\text{mm}$ ,  $S_a=S_b=0$ ,  $H=317\text{mm}$ , 且划线头工作时作匀速运动,运动速度为  $v=10/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

经 Matlab 软件仿真,可得出机构末端划线头  $P$  作上述 6 段曲线轨迹时的动力学变化规律(如图 5(a)-(f)所示)。由机构动力学变化规律可以看出,当划线头走行轨迹趋于直线时,其驱动力曲线较为平缓,即驱动力的变化比较小,也即划线作业时的划线质量较好,机构的工作性能更为可靠,可适当提高划线速度以提高划线效率。同时从动力学角度说明,该机构更适用于曲率半径较大的曲线或者直线的划线作业<sup>[6]</sup>。

### 5 结论

1) 所提出的二自由度并联机构具有自由度少、结构简单、易于控制等特点,可用作平面划线机或者其它类似自动机械的执行机构。

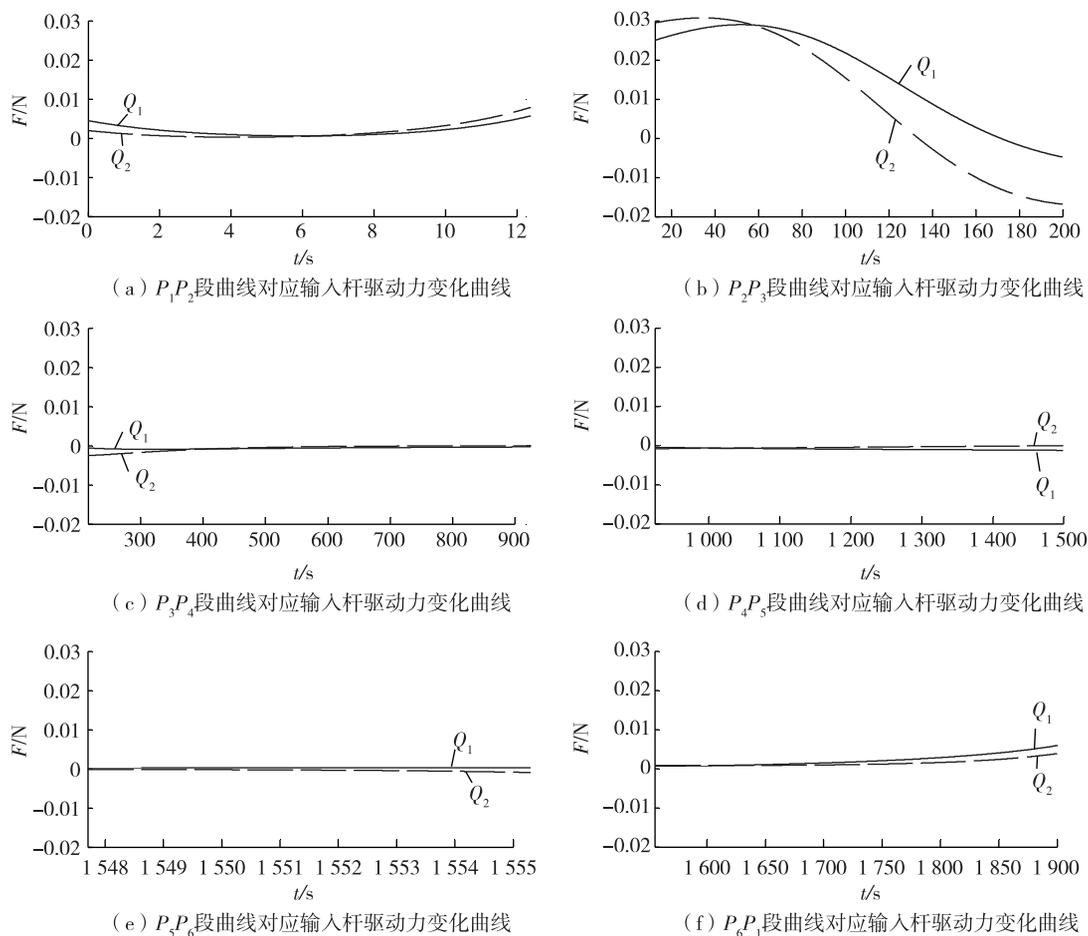


图 5 划线头 P 作叶片轨迹运动时机构动力学变化规律图

Fig.5 Variation map of institutional dynamics, when the scribe P is the blade trajectory

2) 通过建立机构动力学模型,可推导出机构的拉格朗日动力学方程。并以 0.5m 工业叶片为例,通过 Matlab 软件仿真,可知该少自由度并联机构适合于曲率半径较大的曲线或者直线形状零件的划线作业。

参考文献:

[1]徐鹏云.三坐标划线机控制系统设计[D].保定:河北农业大学,2009.  
 [2]熊建国.工业机器人的应用和发展趋势[J].才智,2009(1):166.

[3]李艳.二自由度冗余驱动并联机器人的动力学建模及控制研究[D].济南:山东大学,2010.  
 [4]杨义勇,金德闻.机械系统动力学[M].北京:清华大学出版社,2009:8-34.  
 [5]蒋永健,邓嘉鸣,秦娴.面向工业风机叶片划线的 2DOF 并联机构运动特性分析[J].常州大学学报(自然科学版),2014,26(3):28-32.  
 [6] SHEN H P, YANG T L, MA L ZH. Synthesis and structure analysis of kinematic structures of 6-dof parallel robotic mechanisms[J].Mechanism and Machine Theory, 2005,40:1167-1180.

(责任编辑:李艳)