

文章编号:2095-0411(2016)03-0088-05

光子扣除双模压缩相干态的压缩性质

王 帅,侯丽丽,陈宪锋
(常州大学 数理学院,江苏 常州 213164)

摘要:在量子光学中,光子扣除是一种最为基本的非高斯操作。当光子扣除操作执行于光场的一般高斯型量子态-双模压缩相干态时,可以得到一种非高斯型量子态,即光子扣除双模压缩相干态。研究结果表明:对量子态的 2 个模扣除相同的光子数可以明显地增强双模压缩相干态的双模压缩以及和压缩效应,而对量子态的 2 个模扣除不同的光子数通常会削弱态的压缩性质。

关键词:非高斯型量子态;光子扣除;压缩性质

中图分类号:O 431.2

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2016.03.018

Squeezing Properties of Photon-Subtracted Two-Mode Squeezed Coherent States

WANG Shuai, HOU Lili, CHEN Xianfeng

(School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Photon subtraction is a basic non-Gaussian operation in quantum optics. Applying photon subtraction on a general Gaussian state (two-mode squeezed coherent state) of light field, one can obtain a non-Gaussian state, called photon-subtracted two-mode squeezed coherent state. Our results indicate that the symmetry photon subtraction can clearly enhance the two-mode squeezing and sum squeezing of the state. While the asymmetry photon subtraction generally weak the squeezing effect.

Key words: non-Gaussian state; photon subtraction; squeezing properties

近年来,光场的非高斯型量子态的非经典性质成为量子光学和量子信息领域中的一个研究热点。对光场中传统的高斯型量子态执行光子扣除或光子增加等非高斯操作,是制备非高斯型量子态的一种有效途径^[1-2]。这一类非高斯型量子态具有更强的非经典性质,譬如压缩性质、纠缠性质、Wigner 函数的负值分布等,在量子信息处理过程中显示出重要的应用价值。1991 年,Agarwal 等^[3]首先从理论上引入了光子增加相干态,并研究了它的压缩等非经典性质。直到 2004 年,在实验上通过一个非兼并的

弱耦合参量放大器实现单光子增加相干态的制备^[4]。对于光子扣除操作,Wenger 等^[5]在实验上展示了光子扣除操作可以用一块高透射率的分束器和光子探测器来实现。在理论上,Dakna 等^[6]在 1997 年就提出了利用光子扣除压缩真空态来产生薛定谔猫态的方案。Ourjoumtsev 等^[7]在实验上验证了这个方案的可行性。

对于双模光场,王向斌^[8]通过对双模压缩相干态的一个模执行多光子增加操作引入光子增加双模压缩相干态,并研究了该非高斯型量子态的非经典

收稿日期:2015-09-30。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11404040);江苏省自然科学基金资助项目(BK20140253);江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(KYLX15-1132)。

作者简介:王帅(1979—),男,山东平邑人,博士,讲师,主要从事量子光学研究。

性质。随后,多光子扣除双模压缩真空态以及多光子增加双模压缩热态的非经典性质也相继被详细研究^[9-10]。最近,研究了多光子扣除和增加双模压缩真空态的压缩性质、纠缠性质,并证明了光子扣除操作还可以进一步改善量子隐形传态的保真度^[11]。另一方面,还发现光子增加操作还可以增强双模压缩相干态的和压缩以及差压缩这两类高阶压缩性质^[12]。在本文中,将研究光子扣除双模压缩相干态的双模压缩性质以及和压缩性质,并分析光子扣除操作对增强压缩性质的效果。

1 光子扣除双模压缩相干态及归一化

理论上,双模压缩相干态是由一个双模压缩算符和平移算符先后作用于双模真空态上得到的,即

$$|\xi, \lambda_1, \lambda_2\rangle = D(\lambda_1, \lambda_2) S_2(\xi) |0, 0\rangle \quad (1)$$

其中

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = \exp[\lambda_1 a^\dagger - \lambda_1^* a + \lambda_2 b^\dagger - \lambda_2^* b] \quad (2)$$

为双模平移算符, $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi_1}$ 和 $\lambda_2 = |\lambda_2| e^{i\varphi_2}$ 是量子态中的2个平移参量,而

$$S_2(\xi) = [\xi a^\dagger b^\dagger - \xi^* ab] \quad (\xi = r e^{i\theta}) \quad (3)$$

是量子光学中的双模压缩算符, $\xi = r e^{i\theta}$ 为复压缩参数。在文献^[13]中,已经引入了多光子扣除双模压缩相干态,实质上就是对双模压缩相干态的两个模执行多光子扣除操作得到的。它是一种新的非高斯型量子态,其表达式可表示为

$$|\text{TMSCS}\rangle_{\text{ps}} = N_{m,n}^{-1/2} a^m b^n |\xi, \lambda_1, \lambda_2\rangle \quad (4)$$

式中 $N_{m,n} =$

$$\text{Tr}(a^m b^n |\xi, \lambda_1, \lambda_2\rangle \langle \xi, \lambda_1, \lambda_2| a^{\dagger m} b^{\dagger n})$$

是该量子态的归一化系数。不同于文献^[13],为了下面的研究方便,在这里首先计算出一般算符 $a^{\dagger q} a^p b^{\dagger j} b^h$ 在双模压缩相干态中的期望值,

$$N_{p,q,h,j} = \langle \xi, \lambda_1, \lambda_2 | a^{\dagger q} a^p b^{\dagger j} b^h | \xi, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{\partial^{p+q} \partial^{h+j}}{\partial f^p \partial s^q \partial t^h \partial \tau^j} \exp[(fs + t\tau) \sinh^2 r + \frac{1}{2}(fte^{i\theta} + s\tau e^{-i\theta}) \sinh 2r + f\lambda_1 + s\lambda_1^* + t\lambda_2 + \tau\lambda_2^*]_{f,s,t,\tau=0} \quad (5)$$

在计算公式(5)的过程中,利用了双模相干态的完备性关系,以及下面的积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp[\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^*] = -\frac{1}{\zeta} \exp\left[-\frac{\xi\eta}{\zeta}\right] \quad (6)$$

其收敛条件为 $\text{Re}(\zeta) < 0$ 。进一步利用双变量厄密

多项式的母函数

$$H_{m,n}(x, y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \exp[-tt' + tx + t'y] \big|_{t,t'=0} \quad (7)$$

和下面的关系式

$$\frac{\partial^{l+k}}{\partial x^l \partial y^k} H_{m,n}(x, y) = \frac{m! n!}{(m-l)! (n-k)!} H_{m-l, n-k}(x, y) \quad (8)$$

以及双变量厄密多项式母函数的求和形式

$$H_{m,n}(x, y) = \sum_{f=0}^{\min[m,n]} \frac{(-1)^f m! n!}{f! (m-f)! (n-f)!} x^{m-f} y^{n-f} \quad (9)$$

把式(5)改写为如下求和形式

$$N_{p,q,h,j} = e^{i(p-q)\varphi_1 + i(h-j)\varphi_2} |\lambda_1|^{p+q} |\lambda_2|^{h+j} q! j! \times \sum_{k=0}^{\min[p,q]} \sum_{l=0}^{\min[h,j]} \frac{(\sinh r)^{2(k+l)} p! h!}{k! l! |\lambda_1|^{2k} |\lambda_2|^{2l}} \times \sum_{f=0}^{\min[p-k, h-l]} \frac{(2e^{i\chi} |\lambda_1 \lambda_2|)^{-f} (\sinh 2r)^f}{f! (p-k-f)! (h-l-f)!} \times \sum_{s=0}^{\min[q-k, j-l]} \frac{(2e^{i\chi} |\lambda_1 \lambda_2|)^{-s} (\sinh 2r)^s}{s! (q-k-s)! (j-l-s)!} \quad (10)$$

式中 χ 是复合相位因子,其定义为

$$\chi = \varphi_1 + \varphi_2 - \theta \quad (11)$$

它是平移和压缩参数中3个相位因子 φ_1, φ_2 和 θ 的复合函数。显然,当 $p = q = m$ 及 $h = j = n$ 时, $N_{p,q,h,j}$ 就退化为光子扣除双模压缩相干态的归一化系数^[13],即

$$N_{m,n} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{(\sinh r)^{2(k+l)} (m! n!)^2}{k! l! |\lambda_1|^{2k-2m} |\lambda_2|^{2l-2n}} \times \left| \sum_{f=0}^{\min[m-k, n-l]} \frac{(2e^{i\chi} |\lambda_1 \lambda_2|)^{-f} (\sinh 2r)^f}{f! (m-k-f)! (n-l-f)!} \right|^2 \quad (12)$$

由式(12)可以看出,光子扣除双模压缩相干态的归一化系数仅是复合相位 χ 周期为 2π 的周期性函数。下面详细地研究光子扣除双模压缩相干态的双模压缩性质与和压缩性质。

2 双模压缩性质

在量子光学领域中,光场量子态的压缩性质是人们最早研究的一种非经典现象。常见的压缩可分为单模压缩、双模压缩,以及和压缩与差压缩^[14-15]。在本文中,将先研究光子扣除双模压缩相干态的双

模压缩效应,然后再研究它的和压缩效应。

对于一个双模系统,一对正交相位振幅算符可分别表示为

$$X = (X_A + X_B) / \sqrt{2}$$

$$P = (P_A + P_B) / \sqrt{2}$$

它们满足对易关系 $[X, P] = 1$, 式中 $X_j = (a_j + a_j^\dagger) / \sqrt{2}$ 为坐标算符, $P_j = (a_j - a_j^\dagger) / (i\sqrt{2})$ 为动量算符(这里 $j = A, B$)。根据量子理论,算符 X 和 P 满足不确定关系 $\langle (\Delta X)^2 \rangle \langle (\Delta P)^2 \rangle \geq 1/4$ 。当协方差 $\langle (\Delta X)^2 \rangle < 1/2$ 或 $\langle (\Delta P)^2 \rangle < 1/2$ 时,则称在 X 方向或 P 方向存在双模压缩性质。对于上面定义的坐标算符和动量算符,只在 P 方向存在压缩,故在文中仅给出算符 P 的协方差^[9]:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta P)^2 \rangle &= \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = -\frac{1}{4} \langle (a - a^\dagger)^2 + \\ &\quad (b - b^\dagger)^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle (a - a^\dagger)(b - b^\dagger) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{4} \langle a - a^\dagger + b - b^\dagger \rangle^2 \end{aligned} \quad (13)$$

由式(10)和(12),可以方便的计算出式(13)中各个算符的期望值,为了避免形式上的繁琐,这里就不再一一列出。由式(10),可以直接计算给出双模压缩相干态的双模压缩表达式

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{-2r} \quad (14)$$

显然,其不依赖于双模平移参数 λ_1 和 λ_2 ,这是预期中的结果。 $\langle (\Delta P)^2 \rangle$ 取值在 $[0, 0.5]$ 之间表示存在双模压缩效应,且 $\langle (\Delta P)^2 \rangle$ 越趋近于 0,双模压缩程度就越高。不考虑平移参数,即当 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = 0$ 时,式(11)可退化为简单的形式:

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle |_{\lambda_1=\lambda_2=0} = -\frac{\langle a^\dagger a \rangle + \langle b^\dagger b \rangle - 2\langle ab \rangle + 1}{2} \quad (15)$$

特别地,当 $n=0$ (或 $m=0$)和 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 都满足时,可计算出动量算符 P 的协方差的解析表达式为:

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle |_{n,\lambda_1,\lambda_2=0} = \frac{m+1}{2} e^{-2r} \quad (16)$$

该式表明对双模压缩真空态的一个模执行光子扣除操作并不能增强量子态的双模压缩程度,而是减弱了态的压缩性质。在一般情况下,可以借助数值分析,研究光子扣除双模压缩相干态的双模压缩性质。

由式(10)和(12)可知,式(13)中场算符的期望值都与 3 个相位因子 φ_1, φ_2 和 θ 。因此,协方差

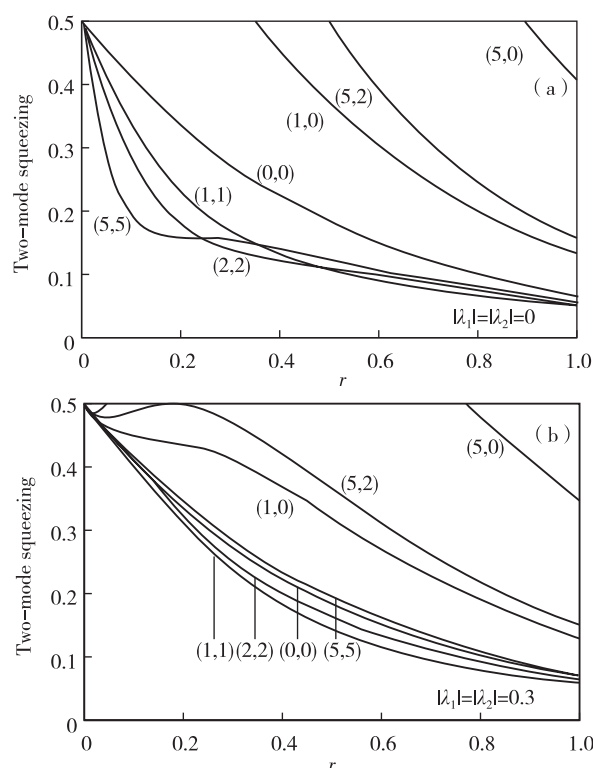


图 1 双模压缩随压缩参数 r 的变化曲线

Fig.1 Two-mode squeezing varies with squeezing parameter r

$\langle (\Delta P)^2 \rangle$ 对这 3 个相位因子的依赖关系显得很是复杂。数值分析结果表明:最优化的双模压缩出现在 $\theta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ 时。为了清楚地显示出光子扣除操作和平移参数如何影响双模压缩效应,图 1 为在给定平移参数和 $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta = 0$ 情况下,双模压缩 $\langle (\Delta P)^2 \rangle$ 随压缩参数 r 的变化曲线。图 1(b)中从上到下各条曲线对于应不同的光子扣除数((5,0), (5,2), (1,0), (5,5), (0,0), (2,2), (1,1)。由图 1 可以看出,对称的光子扣除操作(即 $m=n$)在平移参数都为零的情况下,可以显著地增强量子态的双模压缩程度。并且在弱压缩区域,双模压缩效应随着扣除光子数的增加而增强。然而随着平移因子的增大,特别是大的平移幅值,光子扣除操作并不能增强压缩效应,甚至为减弱它们,如图 1(b)所示。另外,非对称的光子扣除操作($m \neq n$)通常会减弱双模压缩效应,如式(16)所示。

尽管式(14)表明双模压缩相干态的压缩效应与其 2 个平移参量无关。但在光子扣除双模压缩相干态的情况下,2 个平移参量对压缩效应却有重要影响。图 2 展示了在 $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta = 0$ 和压缩参数 $r = 0.2$ 给定的情况下,对于不同的扣除光子数(m, n)双模压缩随 2 个平移参数幅值的变化曲面。图 2

(a)表明,只对一个模执行光子扣除操作,双模压缩程度不依赖于另一个模的平移参数。且与双模压缩相干态相比,双模压缩程度总是被减弱的。对于大的平移参量幅值, $\langle (\Delta P)^2 \rangle$ 趋近于双模压缩真空态的压缩程度,即 $\langle (\Delta P)^2 \rangle \rightarrow 0.335$,这是因为当平移参量幅值足够大时,从量子态的2个模中扣除几个光子并不能对压缩产生明显的影响。因此,数值结果显示:与双模压缩相干态相比较,2个平移参量会削弱光子扣除双模压缩相干态的压缩效应。

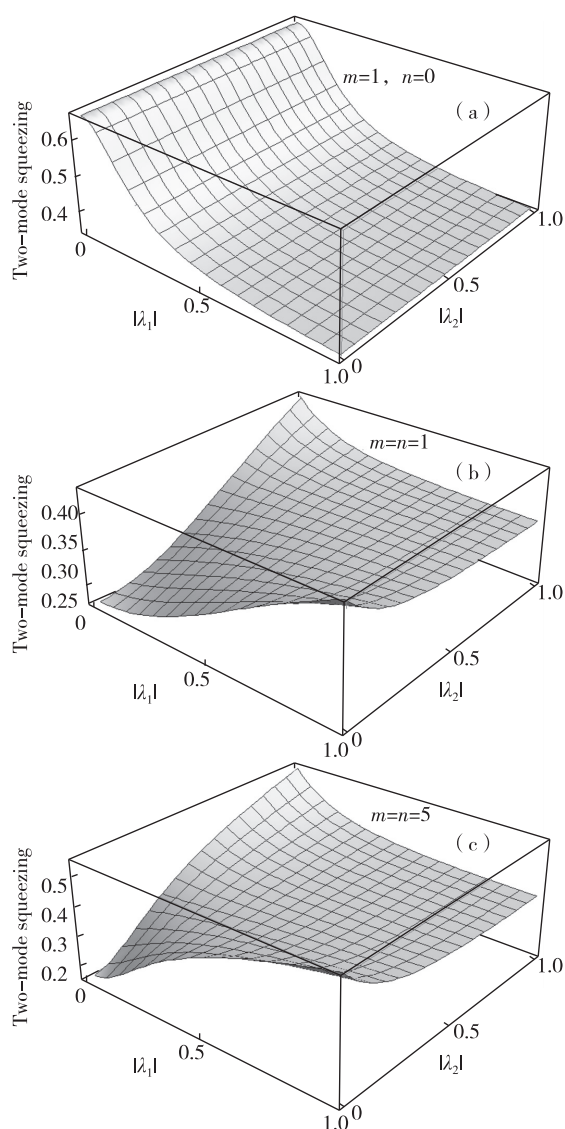


图2 双模压缩随2个平移参数幅值的变化曲面

Fig.2 The two-mode squeezing varies with both displacement amplitudes

3 和压缩效应

在量子光学中,和压缩与差压缩效应是2种高阶双模压缩效^[14-15]。对于任意双模系统,和压缩与

所谓的双模正交算符 V_φ 有关。该双模正交算符 V_φ 的形式为^[14]

$$V_\varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} a^\dagger b^\dagger + e^{-i\varphi} ab) \quad (17)$$

式中 φ 是算符 V_φ 在复数平面上与实轴的夹角。对于某任意一个角度 φ , 如果不等式

$$\langle (\Delta V_\varphi)^2 \rangle < \frac{1}{4} \langle a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \rangle \quad (18)$$

成立,则称该量子态存在和压缩效应。由式(18),可以进一步定义和压缩度的表达式

$$S = 4 \frac{\langle (\Delta V_\varphi)^2 \rangle - \langle a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \rangle}{\langle a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \rangle} \quad (19)$$

把式(17)代入式(19),可得双模量子态和压缩度

$$S = \frac{2\langle a^\dagger b^\dagger ab \rangle + 2\text{Re}(e^{-2i\varphi} \langle a^2 b^2 \rangle)}{\langle a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \rangle} - \frac{4\text{Re}^2(e^{-i\varphi} \langle ab \rangle)}{\langle a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \rangle} \quad (20)$$

由式(19)关于和压缩度 S 的定义可知,当 S 的取值在 $[-1, 0)$ 区间就表明存在和压缩,并且 S 的取值越趋近于 -1 , 量子态的和压缩的程度就越高。特别地,当 $n=0$ (或 $m=0$) 和 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 都满足时,容易导出相应的和压缩度的解析表达式

$$S_{n, \lambda_1, \lambda_2=0} = \frac{1 - \cosh 2r}{\cosh 2r} \quad (21)$$

该式清楚地表明,对双模压缩真空态的其中一个模执行光子扣除操作并不会改变量子态的和压缩程度。在一般情况下,可以借助数值分析,研究光子扣除双模压缩相干态的和压缩性质。

由式(10)和(12)可以看出, $\langle a^\dagger b^\dagger ab \rangle$ 和 $\langle a^\dagger a + b^\dagger b + 1 \rangle$ 都是复合相位 χ 周期为 2π 的周期性函数,而 $\langle ab \rangle$ ($\langle a^2 b^2 \rangle$) 不仅是 χ 的函数,也是 $\varphi_1 + \varphi_2$ ($2\varphi_1 + 2\varphi_2$) 的周期性函数。因此,和压缩度 S 实际上是 φ_1, φ_2 和 θ 3个相位角的某种复合函数。数值分析结果表明:最优化的和压缩度出现在 $\varphi = \pi/2$ 和 $\theta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ 时,并且当对双模压缩相干态的两个模执行相同个数光子扣除操作时,可得到最高的和压缩度。图3给出了在 $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta = 0$ 和不同的光子扣除数 (m, n) 的情况下,和压缩随压缩参数 r 的变化曲线(从上到下各条曲线对应于不同的光子扣除数 $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (5, 5)$)。图3表明,光子扣除操作可以提高量子态的和压缩程度。另外,随着扣除光子数的增加,和压缩程度会进一步增强,尽管这种增强效应并不明显。因此,只对双模压缩态的2个模各扣除一个光子,就可以取得较好的压缩增强效果,在实验上也更易于实现。另一方面,

数值结果表明 2 个平移参量对和压缩效应有一定的影响,如图 3(b)所示。特别是在 2 个平移参量不对称的情况下,平移参量会严重地削弱量子态的和压缩程度。

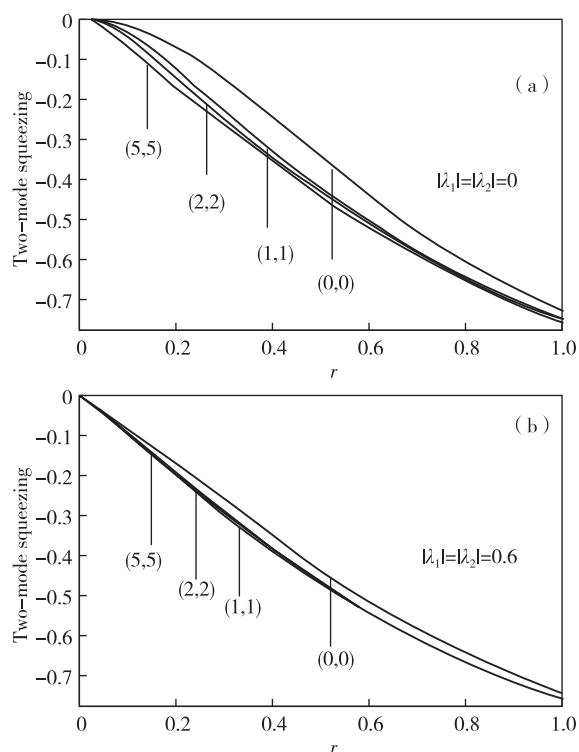


图 3 和压缩随压缩参数 r 的变化

Fig.3 The sum squeezing degree S varies with the squeezing parameter

4 结 论

研究了光子扣除操作如何影响量子态的双模压缩以及和压缩性质。研究结果表明:对称的光子扣除操作可以明显地增强量子态的双模压缩以及和压缩程度,然而非对称的光子扣除操作通常会削弱态的压缩性质;另外,量子态中的 2 个平移参量会削弱态的双模压缩与和压缩的程度。这些研究结果进一步丰富了非高斯型量子态的量子调控理论,并为量子光学的实验设计提供了有益的理论参考。

参考文献:

[1] DELL'ANNO F, DE SIENA S, ILLUMINATI F. Multiple photon quantum optics and quantum state engineering [J]. Phys Rep, 2006, 428(2/3): 53-168.
[2] KIM M S. Recent developments in photon-level operations on travelling light fields [J]. J Phys B: At

Mol Opt Phys, 2008, 41:133001.

- [3] AGARWAL G S, TARA K. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state [J]. Phys Rev A, 1991, 43: 492.
[4] ZAVATTA A, VICIANI S, BELLINI M. Quantum-to-classical transition with single-photon-added coherent states of light [J]. Science, 2004, 306(5696): 660-662.
[5] WENGER J, TUALLE-BROURI R, GRANGIER P. Non-Gaussian Statistics from Individual Pulses of Squeezed Light [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92: 153601.
[6] DAKNA M, ANHUT T, OPATRYN T, et al. Generating Schrödinger cat like states by means of conditional measurements on a beam splitter [J]. Phys Rev A, 1997, 55: 3184.
[7] OURJOUTSEV A, TUALLE-BROURI R, LAURAT J, et al. Generating optical Schrödinger Kitten for quantum information processing [J]. Science, 2006, 312(5770): 83-86.
[8] WANG X B, KWEK L C, LIU Y, OH C H. Non-classical effects of two-mode photon-added displaced squeezed states [J]. J Phys B: At Mol Opt Phys, 2001, 34(6): 1059-1078.
[9] HU L Y, XU X X, FAN H Y. Statistical properties of photon-subtracted two-mode squeezed vacuum and its decoherence in thermal environment [J]. J Opt Soc Am B, 2010, 27(2): 286-299.
[10] HU L Y, JIA F, ZHANG Z M. Entanglement and non-classicality of photon-added two-mode squeezed thermal state [J]. J Opt Soc Am B, 2012, 29(6): 1456-1464.
[11] WANG S, HOU L L, CHEN X F, et al. Continuous variable quantum teleportation with non-Gaussian entangled states generated via multiple-photon subtracted and addition [J]. Phys Rev A, 2015, 91(6): 063832.
[12] WANG S, HOU L L, XU X F. Higher nonclassical properties and entanglement of photon-added two-mode squeezed coherent states [J]. Opt Commun, 2015, 335: 108-115.
[13] WANG S, YUAN H C, XU X F. Photon statistical properties of multiple-photon-subtracted two-mode squeezed coherent states [J]. Opt Commun, 2013, 299: 154-160.
[14] HILLERY M. Sum and difference squeezing of the electromagnetic field [J]. Phys Rev A, 1989, 40(6): 3147-3155.
[15] NGUYEN B A, TINH V. General multimode sum-squeezing [J]. Phys Lett A, 1999, 261(1/2): 34-39.

(责任编辑:李艳)