

文章编号:2095-0411(2016)05-0054-06

## 3DOF 弹性并联机构逆向运动和力学特性分析

朱 伟<sup>1,2</sup>, 耿 林<sup>1</sup>, 许兆棠<sup>2</sup>, 沈惠平<sup>1</sup>, 刘晓飞<sup>1</sup>

(1.常州大学 机械工程学院,江苏 常州 213016;2.江苏省数字化制造技术重点实验室,江苏 淮阴 223003)

**摘要:**由于机构运动过程中构件存在弹性形变,导致机构末端执行器姿态难以保证正确姿态。以 3UPS/PU 并联机构为例设计一种 3DOF 弹性被动运动机构,采用闭合矢量法求出机构的运动逆解和速度方程。将机构的平台和支链拆开,构建各构件的力和力矩静平衡方程,得到对应的 27 组方程,解出所有构件的约束力和约束力偶,并通过 MATLAB 仿真得到各条弹性支链的约束反力和力矩随动平台位姿变化而变化的曲线,为进一步研究弹性被动运动机构的逆向运动提供理论参考。

**关键词:**并联机构;逆向运动;力学逆解;弹性机构

**中图分类号:**TH 242

**文献标志码:**A

**doi:**10.3969/j.issn.2095-0411.2016.05.009

## Analysis on Inverse Kinematics and Mechanical Properties of a Three DOF Flexible Parallel Mechanism

ZHU Wei<sup>1,2</sup>, GENG Lin<sup>1</sup>, XU Zhaotang<sup>2</sup>, SHEN Huiping<sup>1</sup>, LIU Xiaofei<sup>1</sup>

(1.School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213016, China; 2.Jiangsu Digital Manufacture Technology Main Laboratory, Huaiyin 223003, China)

**Abstract:** Because of the elastic deformation of the member in the process of mechanism movement, it is difficult to guarantee the attitude of the end effector. In this paper, the 3UPS/PU parallel mechanism is used as an example to design a kind of 3DOF elastic passive motion mechanism, and the closed vector method is used to derive the inverse kinematics solution and the velocity equation of the mechanism. By disassembling the platform and branched chain of the mechanism to 27 groups dynamical equations were built, from which the corresponding solutions about forces and moments of all components were obtained. And through the MATLAB simulation, we get the curves of the constraint reaction force and torque with the change of the position and attitude of the elastic chain, which provides a theoretical reference for the reverse motion analysis of the elastic passive motion mechanism.

**Key words:** parallel mechanism; inverse motion; inverse solution of force; flexible mechanism

并联机构由于具有刚度大、承载能力强、精度高等优点已被广泛应用于各种场合,诸如航空模拟平台、并联机床、并联机器人、高精度定位平台等领域。

这类应用通常是在已知动平台运动轨迹的情况下,在支链中采用主动驱动源(如电机、气缸或液压缸等元件),通过位置传感器反馈数据和计算机编程控制

**收稿日期:**2015-03-30。

**基金项目:**国家自然科学基金(51375062);江苏省自然科学基金(BK20161192);常州市应用基础计划项目(CJ2012008);江苏省数字化制造技术重点实验室开放课题(HJDML-1001)。

**作者简介:**朱伟(1976—),男,江苏泰州人,博士,副教授。

驱动源,使动平台在规定的运动轨迹上精确运动,从而完成切削、跟踪或定位等作业任务。这类机构可称为主动运动机构,应用较为广泛。当广义力或负载作用于动平台上、迫使驱动支链做被动自适应运动,从而使动平台调整当前位姿状态,这类机构可称为被动运动机构。常采用弹性元件(如弹簧、阻尼器、减振器)代替支链中的驱动副,确保外力撤销后机构能恢复到初始位置,这类机构主要用于力控制机器人<sup>[1-2]</sup>、欠驱动机械手指<sup>[3]</sup>、多维减振平台<sup>[4]</sup>等领域,可降低控制系统的复杂性,并实时修正末端构件的位姿状态。

对于少自由度主动并联机构的受力分析,最常见的方法是借助于虚功原理或运动雅克比矩阵<sup>[5]</sup>,在已知运动轨迹和外载荷的情况分析其受力情况,力和力矩自动支链向执行末端传递。对于被动自适应运动机构,通常运动从执行末端输入,力和力矩自动平台向支链传递,这与主动运动机构力传递方向正好相反,属于力的逆解问题,由于力逆解涉及高维非线性代数方程求解<sup>[6]</sup>,求解比较复杂,限制了被动运动机构的推广。本文针对一种基于虚拟弹簧驱动的 3UPS/PU 弹性并联机构,通过在动平台上施加广义力和力矩,采用拆分法建立各构件静力学平衡方程,研究弹性支链的运动变形和机构的力逆解问题。

## 1 运动学建模

### 1.1 机构描述

3UPS/PU 并联机构是有上动平台、下定平台、3 条弹性支链和 1 条中间从动支链构成,机构结构如图 1 所示。定平台  $\triangle A_1 A_2 A_3$  和动平台  $\triangle B_1 B_2 B_3$  均为等边三角形,半径分别为  $r_a$  和  $r_b$ ,且动、定平台初始位置保持平行, $O$  点和  $P$  点分别为两平

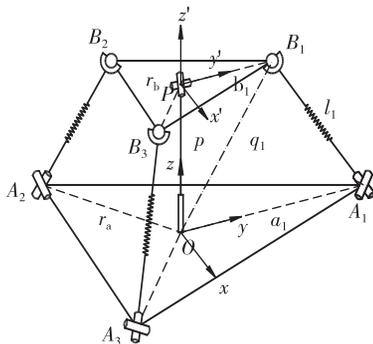


图 1 机构简图

Fig.1 Organization diagram

台的中心。3 条弹性支链呈  $120^\circ$  对称布置于动定平台之间,通过球铰( $S_i$  副)与动平台联结于  $B_i$  点,通过虎克铰( $U_i$  副)与定平台联结于  $A_i$ ,其中虎克铰一条回转轴与支链中的移动副垂直,另一条回转轴线与支链重合。3 条弹性支链中的移动副( $P_i$ )均采用气弹簧替代;中间支链一端通过移动副与下定平台的中心  $O$  点竖直接联,另一端通过虎克铰与动平台的中心  $P$  点联结。

根据机构的方位特征理论<sup>[7]</sup>,该机构的独立回路数  $\nu = 3$ ,弹性支链的 POC(方位特征)集为  $\begin{bmatrix} t^1 \\ r^3 \end{bmatrix}$  ( $t^1$  表示一移动,  $r^3$  表示三转动,  $i = 1, 2, 3$ ),中间支链 POC 集为  $\begin{bmatrix} t^1 \\ r^2 \end{bmatrix}$ ,则机构的 POC 集为两转动和一移动,自由度为 3。当在动平台上作用一定的力和力矩后,弹性支链作相应的被动自适应运动使动平台达到某一位姿状态;当撤去外力后,机构在弹性元件的作用下可恢复到初始位置。

### 1.2 位置逆解

便于分析,分别在静平台和动平台的中心建立定坐标系  $O-xyz$  和动坐标系  $P-x'y'z'$ ,使  $y$  轴指向  $\overline{OA_1}$  方向, $y'$  轴指向  $\overline{PB_1}$  方向; $x$  轴、 $x'$  轴分别在定平台  $\triangle A_1 A_2 A_3$  和动平台  $\triangle B_1 B_2 B_3$  平面内; $z$  轴、 $z'$  轴分别垂直于定、动平台,坐标系统如图 1 所示。图中  $p$  表示  $\overline{OP}$  的位姿矢量, $q_i$  表示  $\overline{OB_i}$  矢量, $l_i$  表示弹性支链的矢量。

动平台相对于定平台的旋转矩阵可表示为

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha \cos\beta \\ -\cos\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $\alpha$ 、 $\beta$  分别表示动平台绕  $x'$  轴和  $y'$  轴的欧拉角。

定平台中  $A_i$  点的位置矢量  $a_i$  在定坐标系  $O-xyz$  中的位置可表达为

$$\begin{cases} a_1 = [r_a & 0 & 0]^T \\ a_2 = \left[ -\frac{1}{2}r_a & \frac{\sqrt{3}}{2}r_a & 0 \right]^T \\ a_3 = \left[ -\frac{1}{2}r_a & -\frac{\sqrt{3}}{2}r_a & 0 \right]^T \end{cases} \quad (2)$$

点  $B_i$  在动坐标  $P-x'y'z'$  中的矢量  ${}^B b_i$  可表示为

$$\begin{cases} b_1 = [r_b \ 0 \ 0]^T \\ b_2 = \left[ -\frac{1}{2}r_b \ \frac{\sqrt{3}r_b}{2} \ 0 \right]^T \\ b_3 = \left[ -\frac{1}{2}r_b \ -\frac{\sqrt{3}r_b}{2} \ 0 \right]^T \end{cases} \quad (3)$$

根据图中的矢量关系,可得

$$q_i = p + b_i = l_i + a_i \quad (4)$$

式中  $b_i = {}^A R_B b_i$ 。由此可得第  $i$  根支链的单位向量及长度的表达式为

$$e_i = (p + {}^A R_B b_i - a_i) / l_i \quad (5)$$

$$l_i = \| p + {}^A R_B b_i - a_i \| \quad (6)$$

式中:  $\| \cdot \|$  表示求模;  $e_i$ 、 $l_i$  分别表示第  $i$  根弹性支链的单位矢量和长度,且  $l_i = l_0 + \Delta l_i$ ,  $l_0$  表示初始位置时支链的长度,  $\Delta l_i$  表示第  $i$  根弹性支链的长度变化量。

根据式(1)~(6),可求得弹性支链的长度变化量

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= r_a^2 + r_b^2 + p^2 - 2pr_b c\alpha s\beta - 2r_a r_b c\beta - l_0 \\ \Delta l_2 &= r_a^2 + p^2 - \frac{1}{2}r_a r_b (c\beta - \sqrt{3}sa s\beta + 3c\alpha) + \\ &\quad \frac{1}{4}r_b^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_b^2 sa s\beta c\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}r_b^2 c^2\alpha s\beta + \frac{3}{2}r_b^2 c^2\alpha + \\ &\quad pr_b c\alpha c\beta + \sqrt{3}pr_b c\alpha - l_0 \\ \Delta l_3 &= r_a^2 + p^2 - \frac{1}{2}r_a r_b (c\beta + \sqrt{3}sa s\beta + 3c\alpha) + \\ &\quad \frac{1}{4}r_b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_b^2 sa s\beta c\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}r_b^2 c^2\alpha s\beta + \frac{3}{2}r_b^2 c^2\alpha + \\ &\quad pr_b c\alpha c\beta - \sqrt{3}pr_b c\alpha - l_0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $sa$ 、 $s\beta$ 、 $c\alpha$ 、 $c\beta$  分别表示  $\sin\alpha$ 、 $\sin\beta$ 、 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ ,  $p$  表示中间支链的长度(其变化量即动平台竖直方向的位移量)。

### 1.3 速度分析

由于动平台的运动输出为沿  $z'$  轴的移动和绕  $x'$ 、 $y'$  轴的转动,因此动平台上参考点  $P$  的绝对速度为  $v_P = [0 \ 0 \ v_z]^T$ , 动平台的角速度为  $\omega_P = [\omega_x \ \omega_y \ 0]^T$ 。

式(4)两边分别对时间求导,可得

$$l_i \cdot \omega \times e_i + \dot{l}_i \cdot e_i = v_P + \omega \times b_i \quad (8)$$

式中  $\dot{l}_i$  表示第  $i$  根支链的线速度。

式(8)两边同时点积  $e_i$ , 可得:

$$\dot{l}_i = e_i \cdot v_P + e_i \cdot (\omega \times b_i) \quad (9)$$

可简化为以下形式

$$\dot{l}_i = J [v_P \ \omega^T]^T \quad (10)$$

式中  $J$  即为该机构的雅可比矩阵,仅与机构的结构参数和当前位姿有关,且

$$J = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 \times e_1 & b_2 \times e_2 & b_3 \times e_3 \end{bmatrix}$$

## 2 逆向力分析

### 2.1 受力情况分析

对于被动运动机构而言,通常是已知动平台所受惯性力和惯性力矩,进而求解各个作用支链的受力,即力的逆解。对于空间并联机构,假设动平台中心  $P$  点作用等效六维广义力矢量(包含力和力矩),可描述为

$$F = [F_P \ M_P]^T = \quad (11)$$

$$[F_{Px} \ F_{Py} \ F_{Pz} \ M_{Px} \ M_{Py} \ M_{Pz}]^T$$

式中:  $F$  表示惯性力,  $M$  表示惯性力矩。同样,支链中的受力亦可描述成类似的六维广义力形式。

对于 3-UPS/PU 机构,由于中间从动支链的约束,动平台只能绕  $x'$ 、 $y'$  轴转动和沿  $z'$  轴移动。当动平台受如式(11)所示的六维广义力,实际能有效推动动平台运动的力只有 3 个,其输入可描述为如下形式

$$F_{in} = [F_{Pz} \ M_{Px} \ M_{Py}]^T \quad (12)$$

一般运动副的约束反力跟其自由度有关。对于 U 副,因为其绕 2 个转动轴轴线旋转不传递力矩,存在 4 个约束元素,即 3 个约束反力和 1 个约束力偶;移动副只有一个方向的移动,具有 5 个约束元素,包括 3 个力偶约束和 2 个反力约束;对于球副,由于其具有 3 个旋转自由度,其约束元素则包括 3 个反力约束,不能传递力矩。

### 2.2 力平衡方程

假设机构各构件材质均匀,动平台质量为  $M$  克,其他支链的质量忽略不计。采用拆分法分别将支链各杆从动、定平台中分离出来,然后对每个构件进行静力学分析。

#### 1) 弹性支链的受力分析

第  $i$  根弹性支链向量在固定坐标系中的  $O-xyz$  中的方位可采用 2 个欧拉角  $\theta_i$  和  $\varphi_i$  表示<sup>[8]</sup>,如图 2 所示。

在  $A_i$  点建立支链坐标系  $A_i-x_i y_i z_i$ , 其中  $z_i$  轴

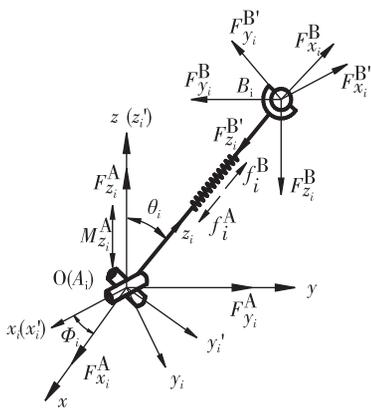


图 2 弹性支链受力图

Fig.2 Forces diagram of flexible branches

沿支链  $A_i B_i$  方向向上,  $x_i$  轴和 U 副垂直于移动副的回转中心重合, 按右手定则确定  $y_i$  轴。定坐标系  $O-xyz$  首先绕  $z$  轴旋转  $\phi_i$  角, 到达另一支链坐标系  $A_i-x_i'y_i'z_i'$ , 再绕  $x_i'$  轴旋转  $\theta_i$  角, 则坐标系  $O-xyz$  相对于支链坐标系  $A_i-x_i'y_i'z_i'$  的转换矩阵为

$$AR_i = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i\cos\theta_i & \sin\phi_i\sin\theta_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i\cos\theta_i & -\cos\phi_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据图 2, 支链在  $O-xyz$  坐标系中的受力主要有: 与定平台铰结点 U 副 ( $A_i$  点) 的约束反力  $F_i^A = [F_{x_i}^A \ F_{y_i}^A \ F_{z_i}^A]^T$  和绕  $z$  轴的约束力矩  $M_{z_i}^A$ 、与动平台铰结点球副 ( $B_i$  点) 的约束反力  $F_i^B = [F_{x_i}^B \ F_{y_i}^B \ F_{z_i}^B]^T$ 、弹簧的弹性驱动力  $f_i^A$  和  $f_i^B$  ( $i=1,2,3$ )。

当支链处于平衡状态时, 可得力平衡方程为

$$\begin{cases} F_i^A + F_i^B + f_i^A + f_i^B = 0 \\ l_i \times F_i^B + M_i^A = 0 \end{cases} \quad (14)$$

式中  $F_i^B = [F_{x_i}^B \ F_{y_i}^B \ F_{z_i}^B]^T$  为支链坐标系  $A_i-x_i'y_i'z_i'$  下  $B_i$  点的约束力, 且  $F_i^B = {}^A R_i F_i^B$ ;  $M_i^A = [0 \ 0 \ M_{z_i}^A]^T$ , 当忽略移动副上下两构件之间的摩擦力及弹簧的能量损耗, 则有  $f_i^A + f_i^B = 0$ 。

### 2) 中间支链受力分析

中间支链的受力主要有上动平台的 U 副约束反力  $F_4^P = [F_{x_4}^P \ F_{y_4}^P \ F_{z_4}^P]^T$  和一个约束力偶  $M_4^P = [0 \ 0 \ M_{z_4}^P]^T$ , 与下定平台的移动副  $O$  点约束反力  $F_4^O = [F_{x_4}^O \ F_{y_4}^O \ 0]^T$  和约束力偶  $M_4^O = [M_{x_4}^O \ M_{y_4}^O \ M_{z_4}^O]^T$ , 受力情况如图 3 所示。

当中间支链平衡时, 静力平衡方程为

$$\begin{cases} F_4^P + F_4^O = 0 \\ M_4^P + M_4^O + p \times F_4^P = 0 \end{cases} \quad (15)$$

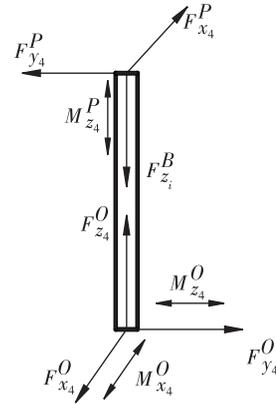


图 3 中间支链受力图

Fig.3 Forces diagram of intermediate branch

### 3) 动平台受力分析

动平台的受力主要包括重力  $M_g$ , 3 个球铰的约束反力  $F_i^B = [F_{x_i}^B \ F_{y_i}^B \ F_{z_i}^B]^T \ i=1,2,3$ 。动平台中心处 U 副 ( $P$  点) 的约束反力  $F_4^P = [F_{x_4}^P \ F_{y_4}^P \ F_{z_4}^P]^T$  和约束力偶  $M_4^P = [0 \ 0 \ M_{z_4}^P]^T$ 。另外, 动平台还承受如式 (12) 的外加六维广义力, 如图 4 所示。

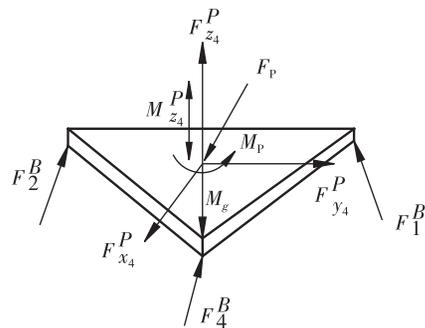


图 4 动平台受力图

Fig.4 By trying to move the platform

当动平台处于力平衡状态时, 力平衡方程为

$$\begin{cases} F_P + \sum_{i=1}^3 F_i^B + F_4^P + M_g = 0 \\ M_4^P + M_P = 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $F_P$ 、 $M_P$  分别是外加力和力矩矢量;  $M_g$  为动平台重力。

联立方程组 (14)、(15)、(16), 共 27 个方程, 3 条弹性支链共 18 个未知参数, 中间支链有 9 个未知参数, 可求得机构所有活动构件及运动副的约束反

力和力矩,静力方程为静定方程。

对于弹性支链中上下两构件间的内作用力,假设其刚度保持不变,可根据胡克定理  $f_i = k_i \Delta l_i$  进行求解,其中  $k_i$  为刚度系数,  $\Delta l_i$  为弹簧变化量( $i = 1, 2, 3$ )。

### 3 数值算例

根据图 1 结构设定机构的几何参数和物理参数见表 1。

表 1 机构结构参数

Table 1 Structural parameters of the mechanism

参数	数值
$l_0/\text{mm}$	180
$r_a/\text{mm}$	300
$r_b/\text{mm}$	100
$k_i/(\text{N} \cdot \text{m})$	35
$p_0/\text{mm}$	150
$M_g/\text{kg}$	15

被动运动机构通常是动平台在广义力作用下实现所需的位姿变化,迫使弹性支链做自适应伸缩运动。为方便分析,本文设定上动平台  $P$  点的运动规律为:  $\alpha$ 、 $\beta$  均为从 0 到  $20^\circ$  匀速变化,中间支链位移  $p$  为从 150mm 匀速变化到 120mm,经 Matlab 编程计算可得各支链及运动副的约束反力和约束力偶如图 5~图 7 所示。

图 5(a)、5(b)、5(c)分别为上动平台与 3 条弹性支链联结处  $B_i$  点处沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  3 个方向的约束反力  $[F_{x_i}^B \ F_{y_i}^B \ F_{z_i}^B]^T$ 。根据式(14),下定平台与弹性支链的联结处  $A_i$  点的约束反力  $[F_{x_i}^A \ F_{y_i}^A \ F_{z_i}^A]^T$  与图中受力大小相等方向相反。

图 6 为上动平台与中间支链联结处  $P$  点(动平台中心)的受力和力矩图。当机构初始位置时,  $P$  点  $z$  方向受力为 150N,而  $x$ 、 $y$  方向均为 0,这是由于动平台质量为 15kg,随着运动过程中弹性支链受力的增加而逐步减小,根据式(16)定平台  $O$  点的受力与图 6(a)中受力大小相等方向相反;图 6(b)中,由于动平台的运动是绕  $x$  轴旋转  $\alpha$  角和绕  $y$  轴旋转  $\beta$  角,而绕  $z$  轴没有运动绕  $z$  轴的力矩为 0。随着弹性支链中弹性力的不断增加,绕  $x$ 、 $y$  轴旋转所需的力矩也不断增大,实际就是驱动动平台旋转的输入力矩。

图 7 是 3 条弹性支链中弹簧的变形和受力,根据胡克定理,随着弹簧变形量的不断增加,弹簧驱动

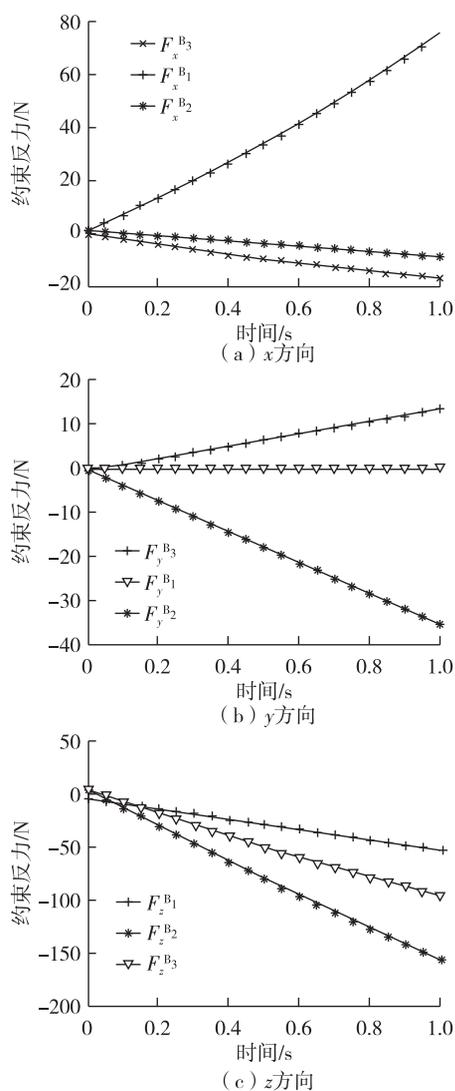


图 5 上动平台  $B_i$  点处的约束反力

Fig.5 Constraint reaction at point  $B_i$  of the moving platform

力也不断增加;其中,支链 1 中弹簧变形量为正,弹簧缩短并承受压力,而支链 2、3 中弹簧变形量为负,弹簧伸长并承受拉力。

### 4 结论

1) 3UPS/UP 机构具有二转动和一移动运动输出特征,通过矢量法分析了机构的位置逆解和速度方程式。

2) 采用拆分法分析机构各个构件和运动副的约束反力及力矩,通过坐标转换方法建立统一力平衡方程。

3) 在并联机构的驱动副配置一定刚度的弹性元件,当动平台在外力驱动下实现所需的运动时,则弹性支链可作相应的被动自适应运动。当外力撤销或

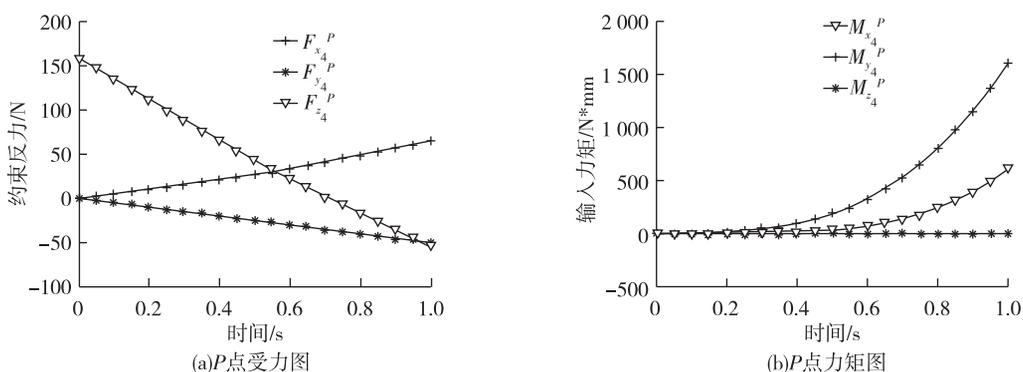


图 6 动平台中心 P 点的约束力和力矩图

Fig.6 Binding and moment diagrams moving platform center point P

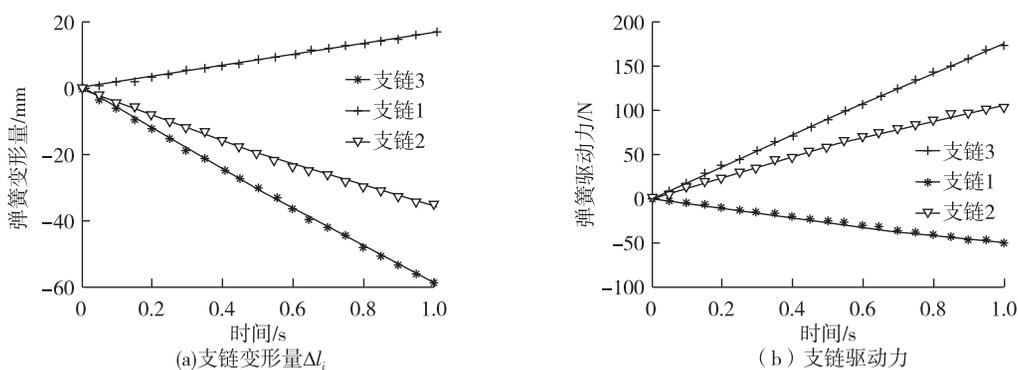


图 7 弹性支链变形和驱动力

Fig.7 Elastic deformation and the driving force branched

运动停止后,在弹性驱动力的作用下,机构可恢复到初始状态。

参考文献:

[1]LIANG L, FENG F X I, KEFU L. Modeling and control of automated polishing/deburring process using a dual-purpose compliant toolhead[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2008,48:1454-1463.  
 [2]FURUKAWA T, RYE D C, G M W. Automated polishing of an unknown three-dimensional surface [J]. Robotics & Computer-Integrated Manufacturing, 1996, 12(3):261-270.  
 [3]黄海,方宏根,姜力,等. 基于虚拟弹簧的欠驱动手指的动力学建模和控制[J]. 吉林大学学报(工学版),2010,40

(6):1688-1692.  
 [4]朱伟,沈惠平,胡爱萍,等. 基于 MRFD 的车载仪器并联减振半主动控制实验[J]. 农业机械学报,2009,40(11): 22-25.  
 [5]王庚祥,刘宏昭,原大宁. 空间 4-SPS/CU 并联机构的受力分析[J]. 农业工程学报,2012,28(22):30-38.  
 [6]廖明,刘斌,刘安心,等. 空间三弹簧系统的力逆解[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2003,4(1):55-57.  
 [7]杨廷力,刘安心. 机器人机构拓扑结构设计[M].北京: 科学出版社,2012.  
 [8]冯志友,张燕,杨廷力,等. 基于牛顿欧拉法的 2UPS-2RPS 并联机构逆动力学分析[J]. 农业机械学报,2009, 40(4):193-197.

(责任编辑:李艳)