文章编号:2095-0411(2016)06-0100-04

关于一种推广形式的 Ehrlich 迭代法

黄清龙
(常州大学 怀德学院,江苏 靖江 214500)

摘要:讨论 Ehrlich 迭代法的一种推广形式。这个推广的 Ehrlich 迭代法适用于同时求解高次代数方程的所有不同重数的复根。构造出迭代公式并给出收敛性定理,借助数学归纳法提供了收敛性和收敛阶的简洁证明。推广的 Ehrlich 迭代法和 Newton 迭代法的效率比较表明:当代数方程的根全为单根时,若代数方程次数不超过 8 则 Newton 迭代法的效率更高,若代数方程次数超过 8 则推广的 Ehrlich 迭代法效率更高;当高次代数方程的根不全为单根时,推广形式的 Ehrlich 迭代法的计算效率总是高于 Newton 迭代法的计算效率。

关键词:Ehrlich 迭代法;推广;收敛性; 计算效率
中图分类号:O 241.7 **文献标志码**:A **doi**:10.3969/j.issn.2095-0411.2016.06.018

On a Generalization of Ehrlich's Method

HUANG Qinglong
(Huaide College, Changzhou University, Jingjiang 214500, China)

Abstract: A generalized Ehrlich's method is discussed. This generalized Ehrlich's method can be used to find all multiple complex roots of a high-order algebraic equation. The iterative formula is constructed and a version of its convergence theorem is given; by mathematical induction a more concise proof of the convergence and convergence order is proposed. Finally, By comparing the computational efficiency of the generalized Ehrlich's method and that of Newton method, the conclusions show that when the roots of algebraic equation are all single, the Newton iterative method is more efficient if the order of algebraic equations does not exceed 8, on the contrary the generalized Ehrlich iterative method is more efficient if the order of algebraic equation exceeds 8. The efficiency analysis also shows that the computational efficiency of the generalized Ehrlich's method is always higher than the computational efficiency of Newton iterative method when the roots of algebraic equation are not all single.

Key words: Ehrlich's method; generalization; convergence; computational efficiency

考虑同时求解 n 次代数方程 $f(x)=0$ 在复数域上全部根的数值方法。这里假定 $f(x)=0$ 有 m 个不同的根,其重数分别为 $\mu_i(i=1,2,\cdots m)$,显然 $\sum_{i=1}^{m}\mu_i=n$ 。

不失一般性,设 n 次多项式 $f(x)$ 是首项系数为 1 的多项式,在复数域上的因式分解式为

$$f(x)=(x-r_1)^{\mu 1}(x-r_2)^{\mu 2}\cdots(x-r_m)^{\mu m} \tag{1}$$

其中 $r_i\neq r_j(i\neq j)$ 。

经简单计算易知 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\mu_j}{x-r_j}$

收稿日期:2016-04-08。
基金项目:江苏省靖江市科技局与常州大学怀德学院产学研合作项目(CDHJZ1509008)。
作者简介:黄清龙(1963—),男,重庆忠县人,硕士,副教授,主要从事应用数学与计算数学研究。

由此得 $r_i = x - \mu_i \dfrac{f(x)}{f'(x)} / [1 - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \dfrac{\mu_j}{x - r_j}]$　$(i = 1, 2, \cdots m)$

从而得到求解 n 次代数方程 $f(x) = 0$ 的迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - [\mu_i \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}] / [1 - \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}] \tag{2}$$

其中 $i = 1, 2 \cdots m$ ，$k = 0, 1, 2 \cdots$ 。

$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots x_m^{(0)}$ 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 个根的初始近似。和文献[1]一样，初值和根的重数及 m 采用文献[2]中的复合算法(composite algorithm)确定。

特别当方程的根的重数 $\mu_i (i = 1, 2, \cdots m)$ 都是 1 时式(2)即为文献[3]中的 Ehrlich 迭代法。因此迭代公式(2)是 Ehrlich 迭代法的一种推广。

文献[4-5]对迭代公式(2)式的收敛性进行过讨论，但过程繁琐。本文把高次代数方程的 m 个不同的复根及每一步迭代产生的 m 个近似根当成整体，即看成是 m 维空间 C^m 中向量。受到文献[6-7]的启发，利用空间 C^m 中的 ∞-范数，给出式(2)的收敛性定理及其更简洁的收敛性证明。本文还分析了式(2)的计算效率。

1　收敛性与收敛阶的讨论

设 $x_i^{(k)}$ $(i = 1, 2 \cdots m; k = 1, 2 \cdots)$ 是由迭代公式(2)的第 k 步迭代给出的 m 个近似根，$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots x_m^{(0)}$ 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 个根的初始近似。

记 $h_i^{(k)} = x_i^{(k)} - r_i$ ，在迭代公式(2)的两边同时减去 r_i ，整理可得

$$h_i^{(k+1)} = \frac{A_i^{(k)}}{1 + A_i^{(k)}} h_i^{(k)} \tag{3}$$

式中 $$A_i^{(k)} = \frac{1}{\mu_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j (r_j - x_j^{(k)})(x_i^{(k)} - r_i)}{(x_i^{(k)} - r_j)(x_i^{(k)} - x_j^{(k)})} \tag{4}$$

记第 m 步迭代的误差向量 $\boldsymbol{h}^{(k)} = (x_1^{(k)} - r_1, x_2^{(k)} - r_2, \cdots, x_m^{(k)} - r_m) = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \cdots, h_m^{(k)})$ ，这里 $\boldsymbol{h}^{(k)}$ 作为 m 维空间 C^m 中的向量，其范数采用

$$\| h^{(k)} \| = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \{ | h_j^{(k)} | \}, (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

记　$$d = \min_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{ | r_i - r_j | \} \tag{6}$$

式中 $| r_i - r_j |$ 为 2 根之差的模，即复平面上 2 个不同复根之间的距离。

记　$$\mu = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{ \mu_i \} \tag{7}$$

取某正数 $\delta < \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{\mu}{n}\right\}$ ，其中 n 为方程次数。

定理 1　当迭代初值 $x_j^{(0)}$ 满足 $\| h^{(0)} \| < \delta d$ 时，由迭代公式(2)产生的序列 $\{x_j^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 r_j ，且存在常数 c ，使得 $\| h^{(k+1)} \| \leqslant c \| h^{(k)} \|^3$ ，从而迭代式(2)的收敛阶至少为 3。

证明：当 $\| h^{(0)} \| < \delta d$ 时，一定有 $| h_j^{(0)} | = | x_j^{(0)} - r_j | < \delta d (j = 1, \cdots m)$ ，

注意到式(6)，从而有

$$| x_i^{(0)} - r_j | \geqslant | r_i - r_j | - | x_i^{(0)} - r_i | > (1 - \delta) d, | x_i^{(0)} - x_j^{(0)} | \geqslant$$
$$| r_i - r_j | - | x_i^{(0)} - r_i | - | x_j^{(0)} - r_j | > (1 - 2\delta) d,$$

故由式(4)知

$$| A_i^{(0)} | \leqslant \frac{1}{\mu_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j | h_i^{(0)} | \cdot | h_j^{(0)} |}{(\delta - 1)(2\delta - 1) d^2} < \frac{\delta^2}{(\delta - 1)(2\delta - 1)} \frac{1}{\mu_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \mu_j \tag{8}$$

由于 $\delta < \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{\mu}{n}\right\}$ ，不难得出 $\dfrac{\delta^2}{(\delta - 1)(2\delta - 1)} \dfrac{1}{\mu_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \mu_j < \dfrac{1}{2}$ ，

故有　$$| A_i^{(0)} | < \frac{1}{2} \tag{9}$$

记 $$\eta = \frac{\dfrac{\delta^2}{(\delta - 1)(2\delta - 1)} (\dfrac{n}{\mu} - 1)}{1 - \dfrac{\delta^2}{(\delta - 1)(2\delta - 1)} (\dfrac{n}{\mu} - 1)} (< 1) \tag{10}$$

则 $$| h_i^{(1)} | \leqslant \frac{| A_i^{(0)} |}{1 - | A_i^{(0)} |} | h_i^{(0)} | \leqslant \eta | h_i^{(0)} | \tag{11}$$

从而当 $| h_j^{(0)} | = | x_j^{(0)} - r_j | < \delta d (j = 1, \cdots m)$ 时，$| h_j^{(1)} | \leqslant \eta | h_j^{(0)} | \leqslant \delta d (j = 1, 2, \cdots m)$ 。

一般地，当 $| h_j^{(k)} | \leqslant \delta d (j = 1, 2, \cdots m)$ 时，类似地可得

$$|A_i^{(k)}| \leqslant \frac{1}{\mu_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\frac{\mu_j|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|}{(\delta-1)(2\delta-1)d^2} < \frac{\delta^2}{(\delta-1)(2\delta-1)}\frac{1}{\mu_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\mu_j < \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$|h_i^{(k+1)}| \leqslant \eta|h_i^{(k)}| \leqslant \delta d \tag{13}$$

其中 η 仍由式(10)确定。

由归纳法知当 $\|h^{(0)}\| < \delta d$ 时式(13)对所有 $i=1,2\cdots m$ ，$k=0,1,2\cdots$ 成立。

由式(13)即得 $|h_i^{(k)}| \leqslant \eta^k|h_i^{(0)}| \leqslant \delta d\eta^k$ ，

因 $0<\eta<1$，所以当 $k\to\infty$时，$h_i^{(k)}\to 0$，即 $x_i^{(k)}\to r_i$ 。

根据式(12)有

$$|A_i^{(k)}| \leqslant \frac{1}{\mu_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\frac{\mu_j|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|}{(\delta-1)(2\delta-1)d^2}$$

进而利用式(5)得

$$|A_i^{(k)}| \leqslant \frac{1}{(\delta-1)(2\delta-1)d^2}\frac{1}{\mu_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\mu_j\cdot\|h^{(k)}\|^2 \leqslant \frac{1}{2\delta^2d^2}\|h^{(k)}\|^2$$

因为 $|A_i^{(k)}| < \frac{1}{2}$ ，所以由 $|h_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{|A_i^{(k)}|}{1-|A_i^{(k)}|}|h_i^{(k)}|$ 得 $|h_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{1}{\delta^2d^2}\|h^{(k)}\|^3$，进而 $\|h^{(k+1)}\| \leqslant \frac{1}{\delta^2d^2}\|h^{(k)}\|^3$

取常数 $c=\frac{1}{\delta^2d^2}$ ，则 $\|h^{(k+1)}\| \leqslant c\|h^{(k)}\|^3$，即定理 1 成立。

2 计算效率分析

把式(2)右端第二项的分母变成 1 即得求 μ_i 重根 r_i 的 Newton 迭代法，即

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{\mu_i f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})} \tag{14}$$

当迭代初值 $x_i^{(0)}$ 足够接近 r_i 时，Newton 迭代式(14)是 2 阶收敛的[8]。

下面简单地分析一下本文讨论的迭代式(2)和上述 Newton 迭代式(14)的计算效率。迭代法的计算效率定义如下。

定义：若迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛且收敛阶 $m>1$，而每一步迭代的计算量为 w ，则 $e=\frac{\ln m}{w}$ 称为此迭代序列或迭代法的计算效率，其中 $\ln m$ 为收敛阶 m 的自然对数。

对于给定的迭代法，迭代计算量还与计算程序的设计有关。假设程序设计时已尽可能减省计算量。计算多项式的值最减省计算量的算法是秦九韶算法[8]，注意到 $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的 n 次多项式，采用秦九韶算法计算一次 $f(x_i^{(k)})$，$f'(x_i^{(k)})$ 各需 $n-1$ 次乘法。

由于加减运算的机器运行时间比乘除运算少得多，下面分析每一步迭代的计算量时，忽略加减运算而只统计乘除运算的次数。以 1 次乘除运算为单位，平均每一个根每迭代一步的计算量是：Newton 迭代法为 $2n$ ，本文讨论的迭代式(2)为 $2n+m+1$。

结合 2 个迭代法各自的收敛阶，则 Newton 迭代法的效率 $e_1=\frac{\ln 2}{2n}$ ；本文讨论的迭代式(2)的效率为 $e_2=\frac{\ln 3}{2n+m+1}$ 。

不妨设代数方程次数 $n\geqslant 2$，注意到 $m\leqslant n$ ，所以对这 2 个效率值进行比较知：

结论 1 当 $m=n$ 即代数方程的根全为单根时，若 $n\leqslant 8$，则 $e_1>e_2$；若 $n\geqslant 9$，则 $e_2>e_1$。

结论 2 当 $m<n$ 即多代数方程的根不全为单根时，则总是 $e_2>e_1$。

因此可以得出结论：当高次代数方程的根不全为单根时，本文讨论的这种推广形式的 Ehrlich 迭代法，其计算效率总是高于 Newton 迭代法的计算效率。

3 结 论

最后给出几点评注。

评注 1 由于迭代式(2)是同时求解高次代数方程的全部复根的并行迭代法，所以我们把高次代数方程的 m 个不同复根作为一个整体对待，即以它们为分量构成向量，进而引入第 k 次迭代的误差向量 $h^{(k)}=(x_1^{(k)}-r_1,x_2^{(k)}-r_2,\cdots,x_m^{(k)}-r_m)$，并用 m 维空间 C^m 中常用的 ∞-范数来给出迭代初值要求和进行收敛阶分析。

根据 Minkowski 定理，有限维线性空间的所有范数都是等价的。所以也可以用其他范数比如另一种常用的 2-范数或一般的 p -范数来给出关于迭代

式(2)的收敛性定理。

事实上，误差向量 $h^{(k)}=(x_1^{(k)}-r_1,x_2^{(k)}-r_2,\cdots,x_m^{(k)}-r_m)$ 的 p-范数

$$\| h^{(k)} \|_p = (\sum_{j=1}^{m} |x_j^{(k)}-r_j|^p)^{\frac{1}{p}}$$

显然本文(5)式给出的范数与 $\| h^{(k)} \|_p$ 之间有关系

$$\| h^{(k)} \| \leqslant \| h^{(k)} \|_p \leqslant m^{\frac{1}{p}} \| h^{(k)} \|$$

因此用 p －范数时迭代公式(2)有如下收敛性定理，其中常数 δ，d 同定理 1。

定理　当迭代初值 $x_j^{(0)}$ 满足 $\| h^{(0)} \|_p < \delta d$ 时，由迭代公式(2)产生的序列 $\{x_j^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 r_j，且 $\| h^{(k+1)} \|_p \leqslant \dfrac{m^{\frac{1}{p}}}{\delta^2 d^2} \| h^{(k)} \|_p^3$，从而迭代式(2)的收敛阶至少为 3。

但直接证明该定理的过程比定理 1 的证明过程要稍微繁琐一些，所以讨论本文的这个推广形式的 Ehrlich 迭代法的收敛性还是用(5)式给出的范数更简洁。

评注 2　收敛性定理 1 中要求的条件即迭代初值 $x_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 满足 $\| h^{(0)} \| < \delta d$，而其中的 $\delta < \max\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{\mu}{n}\right\}$ 只是一个保证收敛的充分条件，更精细的估计也许可以进一步放松对迭代初值的要求，从而得出进一步改进的收敛性定理。

评注 3　在推广的 Ehrlich 迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - [\mu_i \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}] / [1 - \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j}{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}]$$

中需要计算 $\mu_i \dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}(i,2,\cdots,n)$，计算出 $\mu_i \dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}(i,2,\cdots,n)$ 后，进一步算出 $u_j^{(k)}=x_j^{(k)}-\dfrac{\mu_j f(x_j^{(k)})}{f'(x_j^{(k)})}$ 的值并用其取代推广的 Ehrlich 迭代公式中的 $x_j^{(k)}$，由于 $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \dfrac{1}{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}$ 和 $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \dfrac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k)}}$ 的计算量相同，注意到 $x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\dfrac{\mu_i f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}$ 是 2 阶收敛的，因此这样做通常可以提高迭代收敛速度，正如 Gauss-Seidel 技巧的使用一样。

参考文献：

[1] PETKOVIC M S, STEFANOVIC L V. On some iteration functions for the simultaneous computation of multiple complex polynomial zeros[J]. BIT, 1987, 27: 111-122.

[2]FARMER M R, LOIZOU G. An algorithm for the total or partial, factorization of a polynomial[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1977, 82 :427-437.

[3]EHRLICH L W. A modified Newton method for polynomials[J]. Comm ACM,1967,10:107-108.

[4]魏木生，高利新.一种同时求解多项式重根的迭代法及其收敛性[J].华东师范大学学报，1998(2):16-21.

[5] ILIEV A I. A generalization of Obreshkoff-Ehrlich method for multiple roots of algebraic trigonometric and exponential equations[J]. Math Balkanica(N S), 2000, 14: 17-28.

[6]WANG D R, WU Y J. Some modifications of the parallel Halley iteration method and their convergence[J].Computing, 1987, 38:75-87.

[7]黄清龙. 一个修正的 Newton 法之改进[J]. 高校计算数学学报，2002,24(4) :313-319.

[8]曹志浩，张玉德，李瑞遐. 矩阵计算和方程求根[M]. 北京：人民教育出版社，1979:206-232.

（责任编辑：李艳）