

文章编号:2095-0411(2017)05-0046-06

超静定结构装配应力的一种新解法

谭邹卿,蒋学东,张苗苗,戴兴梦

(常州大学 机械工程学院,江苏 常州 213164)

摘要:以包含误差杆件结构为研究对象,提出了一种新解法研究其装配应力。不同于传统的力法、位移法等方法,利用拉格朗日乘数法建立了广义变分原理以求解含有误差杆件结构装配应力。利用拉格朗日函数,构造无条件广义变分原理的新泛函,求解新泛函的极值问题,从而计算有误差杆件结构的装配应力,给出了杆系内力的通解。计算结果表明该方法的正确性和通用性,该方法为求解有误差杆系的超静定问题提供了一种新思路。

关键词:超静定;桁架;装配应力;广义变分原理;拉格朗日乘数法

中图分类号:O 341

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2017.05.007

A New Method for Assembly Stresses of Statically Indeterminate Structure

TAN Zouqing, JIANG Xuedong, ZHANG Miaomiao, DAI Xingmeng

(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Taking pole structures including manufacturing errors as the research object, a new method for assembly stresses of the structures is proposed. Different from the traditional force method or displacement method, the assembly stresses of pole structures including manufacturing errors are presented by generalized variational principles. Using the Lagrange multiplier function, a new function from unconditional generalized variational principles is investigated. The assembly stresses of pole structures including manufacturing errors can be obtained by solving the extremum problem of the new function. A general solution of internal forces of structures is given. The calculation results demonstrate the accuracy and versatility of the proposed method. This method provides a novel way for the research of statically indeterminate structures including manufacturing errors.

Key words: statically indeterminate; truss; assembly stress; generalized variational principles; Lagrange multiplier method

由于超静定结构的承载合理以及安全性较大,在实际工程中得到了广泛应用。但杆件在制造加工

收稿日期:2017-01-20。

基金项目:常州大学校基金资助项目(ZMF14020058)。

作者简介:谭邹卿(1983—),男,四川广安人,博士,讲师,主要从事固体力学研究。E-mail:zqtan@cczu.edu.cn

上不可避免地存在偏差,而且这些差异是随机的,该偏差会引起结构的几何不完善,使得设计模型与实际模型存在一定的差异。特别对大跨度空间结构,结构的分段数越来越多,在结构制作以及装配过程中误差的传递和累积问题越来越凸显^[1]。目前,这种几何不完善性对结构力学响应的影响已有一定的研究。范志飞等^[2]利用随机缺陷模态法分析了结构的稳定性,认为杆件长度扰动引起的装配应力对网壳结构稳定性有较大的影响。张慎等^[3]采用有限元和概率方法分析了网架结构由于制作偏差引起的装配应力,该装配应力对结构的承载力有较大影响。

关于超静定结构求解问题,目前大部分工作采用力法和位移法作为基本方法。位移法以节点位移作为基本未知量,力法则是将多余约束力选作基本未知量。但力法求解静不定结构需补充变形协调方程,其困难在于如何补充变形协调方程^[4]。陈平等^[5]用节点位移法推导了载荷作用下多杆汇交问题的通解,但事实上,还是利用杆件变形的几何关系补充变形协调方程进行计算。周道祥^[6]利用解析几何法求解杆系超静定问题的补充方程。姚顺忠^[7]采用余弦函数研究了一般杆系结构节点位移的计算。边文凤和董正筑^[8]采用微分解析法研究了超静定桁架变形协调方程。成祥生^[9]、吴晓^[4, 10]构造构造拉格朗日函数,利用广义变分法求解外载荷作用下杆件的内力,避免了找出变形的几何条件的困难,但此方法不能直接求解超静定装配应力。本文将对有误差杆件的超静定问题,利用拉格朗日乘法建立普遍情况下广义变分原理的新泛函,以分析各杆的装配应力,将该方法运用于桁架超静定结构中给出其矩阵形式的通解,最后算例验证该方法的正确性和通用性。

1 广义变分原理

考虑有 $n+m$ 个杆件的线性超静定桁架结构,各杆的弹性模量、横截面面积及名义长度分别为 E_i , A_i , l_i ($i=1,2,\dots,n+m$)。假设超静定桁架中有 p ($1 \leq p \leq n+m$) 根杆尺寸相比名义尺寸有加工误差,其误差值分别为 Δ_r ($r=1,2,\dots,p$)。由于误差杆的存在,在装配时可对误差杆加载,使其名义尺寸变为设计尺寸,然后与其他部分组装,再将误差杆上的外力卸载。虽然外力已卸载,杆件不再受外力作用,但也会有装配应力存在。假设在装配后各杆的内力分别为 N_i ($i=1,2,\dots,n+m$)。为了便于讨论,令 N_r^e 为第 r ($r=1,2,\dots,p$) 根误差杆的装配内力。

在不考虑外载作用下对 $n+m$ 个杆件系统列出 m 个平衡方程

$$Q_i(N_1, N_2, \dots, N_{n+m}) = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (1)$$

由于杆件的内力需满足平衡方程式(1),为了研究加工误差效应,利用拉格朗日乘法构造一个无条件广义变分原理的新泛函为

$$L = V + \sum_{r=1}^p \Delta_r N_r^e + \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_i \quad (2)$$

式中: $V = \sum_{j=1}^{n+m} \frac{N_j^2 l_j}{2E_j A_j}$ 为在线弹性范围内整个杆系的应变能; λ_i 为拉格朗日乘子。等式右边的第二项

$\sum_{r=1}^p \Delta_r N_r^e$ 为加工误差效应的影响。计算时若 N_r^e 取拉力,此时公式中杆的加工尺寸比名义尺寸长为正,短为负。反之亦然。

将 N_j 及 λ_i 都当作独立的变量进行变分,则当新泛函 L 达到极值时,利用式(2),则有

$$\delta L = \sum_{j=1}^{n+m} \left(\frac{N_j l_j}{E_j A_j} + \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_j} \right) \delta N_j + \sum_{i=1}^m Q_i \delta \lambda_i = 0 \quad (3)$$

由于 δN_j 及 $\delta \lambda_i$ 都是独立的,因此 L 的极值条件为

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = Q_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_j} = \frac{N_j l_j}{E_j A_j} + \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n+m) \quad (5)$$

其中,式(4)表示 m 个静力学平衡方程;式(5)有 $n+m$ 个方程,它等价于变形协调方程,所以总共有 $n+2m$ 个方程,可解出 $n+m$ 个内力 N_j 和 m 个拉格朗日乘子 λ_i ,从而可求含 p 根误差杆的装配应力。因此,对有误差杆件结构的广义变分原理方法避免了找出变形的几何条件。

2 广义变分原理的应用

利用上述广义变分原理来分析有误差杆件的 n 次超静定桁架结构。在不考虑外载情况下,由式(6)可知, m 个独立平衡方程的最一般形式可表示为

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} N_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

式中 a_{ij} 为 N_j 的系数。由于平衡方程数目为 m 个,而未知内力有 $n+m$ 个,因此问题是 n 次超静定的。

将式(6)代入式(5)整理得

$$\frac{N_j l_j}{E_j A_j} + \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i = - \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_j} \quad (j=1, 2, \dots, n+m) \quad (7)$$

将式(6)和(7)写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_E \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & & & \\ & f_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_j & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & f_{n+m} \end{bmatrix} \quad \text{是一个 } n+m \text{ 阶的对角矩阵,它的元素 } f_j = \frac{l_j}{E_j A_j};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+m)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n+m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(n+m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n+m)} \end{bmatrix} \quad \text{是方程(6)的系数矩阵,是一个 } m \times (n+m) \text{ 阶矩阵; } \mathbf{A}^T \text{ 是矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的转}$$

置,是一个 $(n+m) \times m$ 阶矩阵; $\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_j, \dots, N_{n+m}]^T$ 是内力 N_j 的列阵,对应于结构的全部未知内力; $\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m]^T$ 是拉格朗日乘子 λ_i 的列阵; $\mathbf{N}_E =$

$\left[- \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_1}, - \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_2}, \dots, - \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_j}, \dots, - \sum_{r=1}^p \Delta_r \frac{\partial N_r^e}{\partial N_{n+m}} \right]^T$ 是关于误差效应的列阵。

设

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

它是具有 $n+2m$ 阶的对称方阵。若能求得其逆矩阵 \mathbf{C}^{-1} ,将 \mathbf{C}^{-1} 分块,并使得其子阵同阶于矩阵 \mathbf{C} 对应的子阵

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

利用式(10)可知式(8)的解为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_E \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

为了求解杆系的内力,只取式(11)中有关矩阵 \mathbf{N} 的子阵部分,得

$$\{\mathbf{N}\}_{(n+m) \times 1} = \{\mathbf{D}_{11}\}_{(n+m) \times (n+m)} \{\mathbf{N}_E\}_{(n+m) \times 1} \quad (12)$$

式(12)即可确定有误差杆系的全部内力,从而可得各杆的装配应力。

3 计算与讨论

算例1:如图1所示吊桥链条的一节由3根长为 l 的钢杆组成。若3杆的横截面面积 A 相等、材料的弹性模量 E 相同,则刚度均为 EA ,中间钢杆略短于名义长度,加工误差为 δ ,求各杆的装配内力。

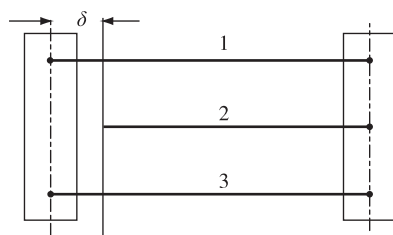


图1 3杆的超静定结构

假设各杆轴力均为拉力,因结构和载荷均对称,

故有

$$N_1 = N_3 \quad (13)$$

由平衡方程可知

$$2N_1 + N_2 = 0 \quad (14)$$

注意到杆2的尺寸比名义尺寸短,由式(2)可构造的新泛函为

$$L = 2 \times \frac{N_1^2 l}{2EA} + \frac{N_2^2 l}{2EA} - \delta N_2 + \lambda (2N_1 + N_2) \quad (15)$$

式(15)关于内力求极值可得

$$\frac{\partial L}{\partial N_1} = \frac{2N_1 l}{EA} + 2\lambda = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_2} = \frac{N_2 l}{EA} - \delta + \lambda = 0 \quad (17)$$

将式(14)、式(16)和式(17)合并,并按式(8)写成如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2l/EA & 0 & 2 \\ 0 & l/EA & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

则

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l/EA & 0 & 2 \\ 0 & l/EA & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

由式(13)和式(19)可得各杆的轴力为

$$N_1 = N_3 = -\frac{\delta EA}{3l}, N_2 = \frac{2\delta EA}{3l} \quad (20)$$

若取 $\delta = \frac{l}{2000}$, 由式(20)可得

$$N_1 = N_3 = -\frac{EA}{6\,000}, N_2 = \frac{EA}{3\,000} \quad (21)$$

式中,负号说明杆 1 和 3 均受压力。式(21)与文献[11]的计算结果完全一致,说明该方法的正确性。

算例 2:如图 2 所示超静定杆系中,AC 杆的加工长度比名义长度略短,加工误差为 δ 。若各杆刚度均为 EA ,求装配后各杆的轴力。

假设各杆轴力均为拉力,因结构和载荷均对称,故有

$$N_1 = N_2, N_4 = N_5 \quad (22)$$

由节点 A、C 的平衡方程可知

$$N_3 - 2N_1 \cos 2\alpha = 0 \quad (23)$$

$$N_3 + 2N_4 \cos \alpha = 0 \quad (24)$$

注意到杆 3 的尺寸比名义尺寸短,由式(2)可构造的新泛函为

$$L = \frac{N_1^2 l}{EA} + \frac{N_3^2 l}{2EA} + \frac{2N_4^2 l \cos \alpha}{EA} - \delta N_3 + \lambda_1 (N_3 - 2N_1 \cos 2\alpha) + \lambda_2 (N_3 + 2N_4 \cos \alpha) \quad (25)$$

式(25)关于内力求极值可得

$$\frac{\partial L}{\partial N_1} = \frac{2N_1 l}{EA} - 2\lambda_1 \cos 2\alpha = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_3} = \frac{N_3 l}{EA} - \delta + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_4} = \frac{4N_4 l \cos \alpha}{EA} + 2\lambda_2 \cos \alpha = 0 \quad (28)$$

将式(23),式(24)以及式(26)~(28)合并,并按式(8)写成如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2l/EA & 0 & 0 & -2\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & l/EA & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4l \cos \alpha / EA & 0 & 2\cos \alpha \\ -2\cos 2\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_3 \\ N_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

则

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_3 \\ N_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l/EA & 0 & 0 & -2\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & l/EA & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4l \cos \alpha / EA & 0 & 2\cos \alpha \\ -2\cos 2\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

由式(22)和式(30)可得各杆的轴力为

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= \frac{EA\delta \cos \alpha \cos 2\alpha}{l[2 \cos^2 2\alpha + \cos \alpha (\cos 4\alpha + 2)]} \\ N_3 &= \frac{2EA\delta \cos \alpha \cos^2 2\alpha}{l[2 \cos^2 2\alpha + \cos \alpha (\cos 4\alpha + 2)]} \\ N_4 = N_5 &= -\frac{EA\delta \cos^2 2\alpha}{l[2 \cos^2 2\alpha + \cos \alpha (\cos 4\alpha + 2)]} \end{aligned} \quad (31)$$

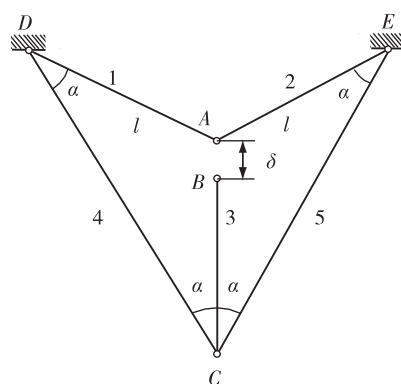


图 2 5 杆的超静定结构

式(31)与文献[12]节点位移法的计算结果完全一致。

若取 $\alpha = 30^\circ$, 由式(31)可得

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0.241 \frac{EA\delta}{l}, N_4 = N_5 = -0.139 \frac{EA\delta}{l} \quad (32)$$

式中,负号说明杆4和杆5均受压力。式(32)与文献[11]的计算结果完全一致,说明该方法可解决高次超静定问题。

由此可知,该方法求解各杆内力的计算过程避免了建立变形协调几何关系的困难。此外,用同一思路,还可以解决外加载荷、温度变化等作用对杆件内力的影响,在此不再详细讨论。

4 结 论

利用拉格朗日函数法建立了有误差杆系结构的无条件广义变分原理,对构造的新泛函求极值以分析超静定桁架问题,给出了矩阵形式的通解,最后验证了该方法的正确性。结果表明:该方法可完全不考虑结构变形后的情况,避免了用几何法易于出错的问题。对于结构关系比较复杂、超静定次数较多的情况,用几何法很难找出变形协调关系,而该方法更显得简洁且便于程序化。因此,该方法为求解超静定结构装配应力提供了一种新解法。

参考文献:

- [1]谢岳城. 空间大型弯曲圆钢管加工误差理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2016.
- [2]范志飞, 曾国华, 董聪. 单层网壳结构随机缺陷模态法研究[J]. 河北建筑科技学院学报, 2006, 23(3): 11-14.
- [3]张慎, 杜新喜, 万金国. 随机制作偏差影响下的网架结构性能分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2009, 31(2): 8-12.
- [4]吴晓. 求解工程中静不定结构内力的通用方法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2016, 47(1): 262-272.
- [5]陈平, 陈国良, 杨绪普. 载荷作用下多杆汇交问题的通解[J]. 力学与实践, 2014, 36(3): 348-350, 378.
- [6]周道祥. 解析法解杆系拉(压)超静定问题[J]. 力学与实践, 2004, 26(2): 66-67.
- [7]姚顺忠. 一般杆系结构节点位移计算方法的探讨[J]. 西南林学院学报, 2002, 22(1): 61-63.
- [8]边文凤, 董正筑. 超静定桁架变形协调方程的新方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(2): 250-252.
- [9]成祥生. 结构分析中的广义变分原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 1985, 6(7): 639-646.
- [10]吴晓. 用拉格朗日函数分析不同模量静不定桁架内力[J]. 力学季刊, 2015, 36(3): 541-546.
- [11]刘鸿文. 材料力学(I)[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [12]陈家骏. 静不定桁架变形协调方程的解析表达式[J]. 河海大学常州分校学报, 2001, 15(2): 7-10.

(责任编辑:李艳)