

文章编号:2095-0411(2017)05-0057-11

一种新型 3T1R 并联机构的设计及其运动学分析

张 震,沈惠平,尹洪贺,许 可,李家宇,杨廷力

(常州大学 现代机构学研究中心,江苏 常州 213016)

摘要:基于方位特征(POC)的并联机构设计理论,提出了一种新的 SCARA 型并联机构,分析计算出该机构的耦合度 $k=1$ 。根据基于序单开链法的机构运动学建模原理,分别给出该机构位置正反解的求解算法,并通过数值算例验证了其正确性。基于导出的机构的位置反解,分析了该并联机构的工作空间,分析结果表明:该机构具有全对称性,工作空间大的特点。研究结果为该机构的样机设计及应用奠定了理论基础。

关键词:并联机构;方位特征;耦合度;运动学分析;位置正反解

中图分类号:TP 241

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2017.05.009

Design and Kinematics Analysis of a Novel 3T1R Parallel Mechanism

ZHANG Zhen, SHEN Huiping, YIN Honghe, XU Ke, LI Jiayu, YANG Tingli

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract:Based on the position and orientation characteristic (POC) of the parallel mechanism design theory, a novel SCARA type parallel mechanism is proposed, the coupling degree of the mechanism $k=1$ is calculated. Then, according to the modeling principle of kinematic of the mechanism based on ordered SOC, the solution algorithm of the forward and inverse position of this parallel mechanism are derived, and an numerical example is provided to confirm the correctness of the solution procedure. Finally, based on the inverse position solutions of the mechanism, the working space of this parallel mechanism is obtained. Analysis results show that this parallel mechanism has characteristics of full symmetry and large working space. These research results provide a theoretical foundation for the prototype design and application of this mechanism.

Key words:parallel mechanism; POC; coupling degree; kinematics analysis; forward and inverse position

国内外对实现 SCARA 型(三平移—转动,3T1R)输出运动的并联机器人的研究和应用开发的基本情况是:国外研究人员大多针对工业需求,并围绕产品进行理论研究和产品开发,1999 年,ABB 公司开

收稿日期:2017-03-22。

基金项目:国家自然科学基金项目(51475050,51375062);江苏省重点研发计划项目(BE2015043)。

作者简介:张震(1992—),男,安徽天长人,硕士生。通讯联系人:沈惠平(1965—),E-mail:shp65@126.com

发了基于三平移 Delta(1985, Clavel) 并操作手的被称为 FlexPicker 的 SCARA 并联机器人^[1], 并已广泛应用; Pierrot 及其团队成员等相继发明了 H4(1999 年)、I4(2003 年)、Par4 系列(2005 年)的四自由度 SCARA 型操作手^[2-4]。国内对 3T1R 并联机构的理论研究较多, 样机研制及其应用开发相对迟缓。2000 年, 黄真^[5]提出了一种 4-URU 型三平移—转动并联机器人; 2001 年金琼、杨廷力^[6]根据基于方位特征矩阵的并联机构设计理论和方法, 提出了一类三平移—转动并联机器人, 并申请了一组 5 个具有单动平台的三平移—转动并联机构^[7], 但未研制样机; 黄田教授于 2010 年开发了具有 2~3 个动平台的四自由度三平移—转动的 Cross-IV 型高速搬运机器人^[8]; 2012 年, 刘辛军教授研制出具有一个动平台的 X₄ 型并联机构样机^[9]。

可见, 相对于三平移 Delta 操作手研究和工业应用相对较为成熟来说, 新型三平移—转动并联机构的结构和应用还有待加强。在上述背景下, 根据基于 POC 集和 SOC 单元的并联机构拓扑结构设计理论和方法^[10], 作者团队系统综合出了 18 种具有较好应用前景的四自由度的三平移—转动并联机构^[11-14]。

文章首先对作者提出的一种四自由度三平移—转动并联机构进行了 POC 集、自由度、耦合度 3 个主要拓扑结构特征的分析, 发现其耦合度为 $k=1$; 因此, 根据基于序单开链法的位置正解求解原理, 对该并联机构建立一个仅含一个虚拟变量的位置相容性方程, 并采用一维搜索法求得其全部正解数值解; 又通过求解机构的位置反解, 验证了正解的准确性; 最后, 对该机构的工作空间进行了分析。

1 新型 3T1R 并联机构的拓扑分析

1.1 机构描述

如图 1 所示, 该机构是由动平台 1、静平台 0 通过 1 条三平移—转动输出的混合支链(HSOC)和 2 条 RSS 支链连接而成, 其中, 混合支链 1 是由支链 $\{-R_{11} // R_{12} // R_{13} \perp R_{14}-\}$ 和支链 $\{-R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} // R_{31}-\}$ 的末端转动轴线重合构成。动平台 1 上转动副 R_{15} 、 R_{35} 的轴线和其法线相平行, 静平台 0 上的转动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 和 R_{41} 为驱动副, 且转动副 R_{11} 与 R_{31} 转动副的轴线垂直, 即: $R_{11} \perp R_{31}$ 。

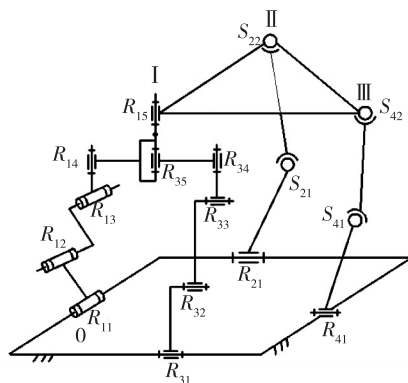


图 1 新型 3T1R 并联机构

1.2 机构的 POC 集和自由度的计算

1) 确定支路末端构件的 POC 集

混合支链 1: $HSOC_1\{-R_{11} // R_{12} // R_{13} \perp R_{14} // R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} // R_{31}-\}$, 支链 2: $SOC_2\{-R_{15}-S_{22}-S_{21}-R_{21}-\}$, 支链 3: $SOC_3\{-R_{41}-S_{41}-S_{42}-\}$, 两者末端构件的 POC 集均为

$$M_{b2} = M_{b3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

2) 确定第 1 个独立回路的位移方程数 ξ_{L1}

混合支链 1 构成第 1 个回路, 其 ξ_{L1} 为

$$\xi_{L1} = \dim\{M_{s1} \cup M_{s2}\} = \dim\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(// \diamond(R_{11}, R_{14})) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(// \diamond(R_{31}, R_{34})) \end{bmatrix}\right\} = \dim\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} = 6$$

其中 M_{s1}, M_{s2} 分别表示混合支链 1 中 2 条分支链 $\{-R_{11} // R_{12} // R_{13} \perp R_{14}-\}$ 和 $\{-R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} // R_{31}-\}$ 末端的 POC 集。

该子并联机构的自由度 $F_{(\text{sub-H})}$ 和 POC 集 $M_{\text{pa}(\text{sub-H})}$ 分别为:

$$F_{(\text{sub-H})} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{Lj} = 10 - 6 = 4$$

$$M_{\text{pa}(\text{sub-H})} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (// R_{14}) \end{bmatrix}$$

3) 确定第 2 个独立回路的独立位移方程数 ξ_{L2}

由混合支链 1、支链 2 组成第 2 个回路,其 ξ_{L2} 为

$$\xi_{L2} = \dim \{M_{\text{pa}(\text{sub-H})} \cup M_{b2}\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

该子并联机构的自由度 $F_{(1-2)}$ 和 POC 集 $M_{\text{pa}(1-2)}$ 为:

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 16 - (6 + 6) = 4$$

$$M_{\text{pa}(1-2)} = M_{\text{pa}(\text{sub-H})} \cap M_{b2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (// R_{14}) \end{bmatrix}$$

4) 确定第 3 个独立回路的位移方程数 ξ_{L3} 为:

$$\xi_{L3} = \dim \{M_{\text{pa}(1-2)} \cup M_{b3}\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (// R_{14}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

5) 确定机构自由度 F 为:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{Lj} = 22 - (6 + 6 + 6) = 4$$

6) 确定机构的 POC 集 M_{pa} 为:

$$M_{\text{pa}} = M_{\text{pa}(1-2)} \cap M_{b3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (// R_{14}) \end{bmatrix}$$

1.3 耦合度的计算

各回路的位移方程数已求出,故各自的约束度为:

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 9 - 2 - 6 = 1$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 7 - 1 - 6 = 0$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 6 - 1 - 6 = -1$$

式中: f_i 为第 i 个运动副的自由度; m_j 为第 j 个 SOC_j 的运动副数; I_j 为第 j 个 SOC_j 的驱动副数; Δ_j 为第 j 个独立回路的约束度, $j=1, 2, 3$ 。

显然,该机构只包含一个 BKC,其耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (1 + 0 + 1) = 1$$

可知,该并联机构可以建立最低维数为 1 的一元非线性位置方程,并可通过一维搜索法求得该机构的位置正解。

2 3T1R 并联机构的位置正解求解

2.1 位置正解分析

2.1.1 坐标系建立及符号标注

机构位置求解模型如图 2 所示。其中,静坐标系 $O-XYZ$ 建立在静平台 0 的中心,且 X 轴与 $R_{21}R_{31}$ 边重合, Y 轴与 $R_{11}R_{41}$ 边重合, Z 轴由右手法则确定;动坐标系 $P-uvw$ 位于动平台 1 的中心点 P , u 轴垂直于 $R_{15}S_{42}$ 边, v 轴平行于 $R_{15}S_{42}$ 边, w 轴同样由右手法则确定。

机构的结构参数为:静平台 0 是边长为 $2a$ 的正方形;动平台 1 是边长为 $2m$ 的等边三角形; α_i 表示转动副 R_{1i} 的转角($i=1,2,3$); β_j 表示转动副 R_{3j} 的转角($j=1,2,3$); δ_1 表示转动副 R_{21} 的转角; θ_1 表示转动副 R_{41} 的转角。机构的结构参数为:混合支链 I 中, h_{ij} 表示 2 个转动副 $R_{ij}, R_{i,j+1}$ 之间的杆长, l_{ij} 表示转动副 $R_{i,j+1}$ 的轴长($i=1,3$; $j=1,2,3,4$);支链 II、III 中, h_{i1} 表示转动副 R_{i1} 与球副 S_{i1} 之间的杆长, h_{i2} 表示球副 S_{i1} 与球副 S_{i2} 之间的杆长($i=2,4$)。

为理解方便,将图 2 机构展开为平面图,如图 3 所示,其中,直线 SS 为静平台 0 的对角线,可见,该机构在结构上关于直线 SS 对称。

动平台 1 绕 Z 轴方向的转动角为 γ ,如图 4 所示。它由动平台 1、静平台 0、2 条 RSS 型无约束支链,以及 1 条三平移—转动输出的混合支链组成。4 个主动副 $R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{41}$ 均位于各边中点,主动输入角分别为 $\alpha_1, \delta_1, \beta_1, \theta_1$ 。

该并联机构正解问题可描述为:已知主动输入转角 $\alpha_1, \delta_1, \beta_1, \theta_1$,求动平台 1 的位置 (x, y, z) 及姿态角 γ 。

2.1.2 基于序 SOC 的机构位置正解求解原理及算法

单开链的约束度为正值、零、负值 3 种形式,其物理意义是^[10]:

1) 约束度为正值 $SOC(\Delta_j^+)$,会使机构自由度增加 Δ_j^+ ;为确定机构的运动,需在约束度为正值 $SOC(\Delta_j^+)$ 上设定 Δ_j^+ 虚拟变量;

2) 约束度为 0 的 $SOC(\Delta_j^0)$,不影响机构自由

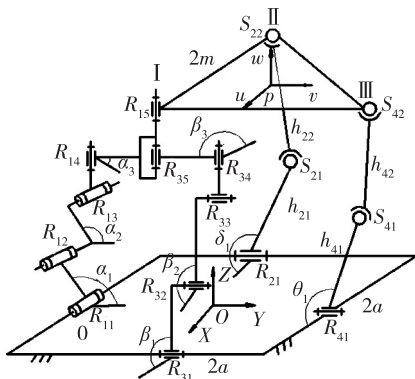


图 2 新型 3T1R 并联机构的运动学分析模型

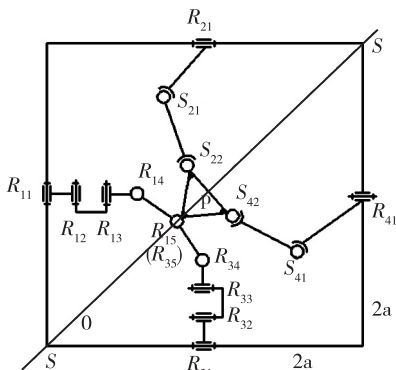


图 3 新型 3T1R 并联机构的俯视展开图

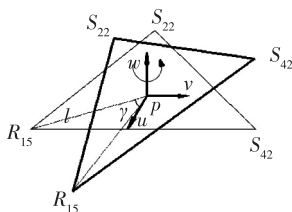


图 4 姿态角 γ 的度量

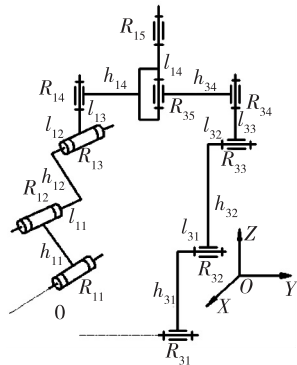


图 5 混合支链结构

度,其运动具有确定性,即其位置正解能独立求解;

3) 约束度为负值的 $\text{SOC}(\Delta_j^-)$,使机构自由度减少 $|\Delta_j^-|$,即对机构建立 $|\Delta_j^-|$ 个约束方程;

4) 因 $\text{SOC}(\Delta_j^+)$ 中的虚拟变量数目 Δ_j^+ ,恰等于约束方程数目 Δ_j^- ,因此,易解出 Δ_j^+ 个变量的真实值。特别是当 $\Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = 1$ 时,易用一维搜索法求得。

根据上述求解原理,进一步给出该机构基于序 SOC 的位置正解的求解算法。

第一步:位置方程的建立

1) 对于第一个单开链 $\text{HSOC}_1\{-R_{11} // R_{12} // R_{13} \perp R_{14} // R_{35} // R_{34} \perp R_{33} // R_{32} // R_{31}-\}$ 而言,若设转动副角 R_{12} 的转角 α_2 为虚拟输入变量 α_2^* ,则可由 HSOC_1 求得:转动副 R_{13} 的转角 α_3 为 α_2^* 的具体函数表达式(记号 * 表示该值为虚拟赋值,下同)。

2) 由第二个单开链 $\text{SOC}_2\{-R_{15}-S_{22}-S_{21}-R_{21}-\}$,可建立杆长约束方程 $S_{21}S_{21}=h_{22}$,从而可求得动平台的输出转角 γ ,也为 α_2^* 的具体函数表达式。

第二步:同理,由单开链 $\text{SOC}_3\{-R_{41}-S_{41}-S_{42}-\}$ 建立杆长约束方程 $S_{41}S_{42}=h_{42}$,可得到一个含有虚拟赋值 α_2^* 的目标函数,利用一维搜索法,从 $0^\circ \sim 360^\circ$ 不断改变虚拟赋值 α_2^* 的初值,直到满足该目标函数为止。此时,对应的虚拟赋值 α_2^* 即为 α_2 的真实值,将其回代计算式,即可得到该并联机构位置正解的实数解。

2.1.3 约束度为正值的 HSOC_1 上各运动副的求解

由 HSOC_1 中的分支链 $\{-R_{11}-R_{12}-R_{13}-R_{14}-R_{35}-R_{15}-\}$ 可依次求得点 $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{35}, R_{15}$ 的坐标,最终可由矢量方程 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR_{15}} - \overrightarrow{PR_{15}}$ 求出 P 点坐标为

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 - m \sin \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \cos \gamma \\ -a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3 + m \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \sin \gamma \\ h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + l_{13} + l_{14} \end{bmatrix} \quad (1)$$

同理,由分支链 $\{-R_{31}-R_{32}-R_{33}-R_{34}-R_{35}-R_{15}-\}$ 可依次求得点 $R_{31}, R_{32}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{15}$ 的坐标,最终可由矢量方程 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR_{15}} - \overrightarrow{PR_{15}}$ 求出 P 点坐标为:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + h_{31} \cos \beta_1 + h_{32} \cos \beta_2 - h_{34} \sin \beta_3 - m \sin \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \cos \gamma \\ l_{31} + l_{32} + h_{34} \cos \beta_3 + m \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \sin \gamma \\ h_{31} \sin \beta_1 + h_{32} \sin \beta_2 + l_{33} + l_{14} \end{bmatrix} \quad (2)$$

从式(1),式(2)可得:

$$h_{12} \sin \alpha_2 - h_{32} \sin \beta_2 = t_1 \quad (3)$$

$$h_{34} \sin \beta_3 = t_2 + h_{14} \sin \alpha_3 \quad (4)$$

$$h_{34} \cos \beta_3 = t_3 + h_{14} \cos \alpha_3 \quad (5)$$

其中,

$$t_1 = -h_{11} \sin \alpha_1 - l_{13} + h_{31} \sin \beta_1 + l_{33}$$

$$t_2 = b + h_{31} \cos \beta_1 + h_{32} \cos \beta_2 + l_{11} + l_{12}$$

$$t_3 = -a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 - l_{31} - l_{32}$$

这里,设定转动副 R_{12} 的转角 α_2 为虚拟输入变量 α_2^* ,则由式(3)可知,转动副 R_{32} 的转角 β_2^* 为虚拟变量 α_2^* 的函数,即

$$\beta_2^* = \arcsin \frac{h_{12} \sin \alpha_2^* - t_1}{h_{32}}$$

从式(4)、式(5)中消去 β_3 , 有

$$A_1 \sin \alpha_3 + B_1 \cos \alpha_3 + C_1 = 0$$

$$\text{令} \quad k_1 = \tan \frac{\alpha_3}{2} \quad (6)$$

$$\text{解得} \quad k_1 = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1^2}}{C_1 - B_1} \quad (7)$$

其中,

$$A_1 = 2t_2 h_{14}$$

$$B_1 = 2t_3 h_{14}$$

$$C_1 = t_2^2 + t_3^2 + h_{14}^2 - h_{34}^2$$

2.1.4 约束度为 0 的 SOC₂ 上各运动副的求解

由支链 II, 得点 S_{21}, S_{22} 的坐标分别为

$$\begin{bmatrix} x_{S21} \\ y_{S21} \\ z_{S21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b + h_{21} \cos \delta_1 \\ 0 \\ h_{21} \sin \delta_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{S22} \\ y_{S22} \\ z_{S22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 - 2m \sin(\gamma + \frac{\pi}{3}) \\ -a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3 + 2m \cos(\gamma + \frac{\pi}{3}) \\ h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + l_{13} + l_{14} \end{bmatrix}$$

进一步, 由杆长约束 $l_{S21} l_{S22} = h_{22}$, 整理并化简有

$$A_2 \sin(\gamma + \frac{\pi}{3}) + B_2 \cos(\gamma + \frac{\pi}{3}) + C_2 = 0$$

令

$$k_2 = \tan \frac{\gamma + \frac{\pi}{3}}{2} \quad (8)$$

解得

$$k_2 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{C_2 - B_2} \quad (9)$$

式中:

$$\begin{cases} A_2 = -4m(-l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 + b - h_{21} \cos \delta_1) \\ B_2 = 4m(-a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3) \\ C_2 = (-l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 + b - h_{21} \cos \delta_1)^2 + 4m^2 + (-a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3)^2 + (h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + l_{13} + l_{14} - h_{21} \sin \delta_1)^2 - h_{22}^2 \end{cases}$$

可见, 输出转角 γ 也为虚拟变量 α_2^* 的函数。

2.1.5 约束度为负值的 SOC₃ 上建立一维搜索函数

由支链 III, 得点 S_{41}, S_{42} 的坐标分别为:

$$\begin{bmatrix} x_{S41} \\ y_{S41} \\ z_{S41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{41} \cos \theta_1 \\ a \\ h_{41} \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{S12} \\ y_{S12} \\ z_{S12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 - 2m \sin \gamma \\ -a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2 + h_{14} \cos \alpha_3 + 2m \cos \gamma \\ h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2 + l_{13} + l_{14} \end{bmatrix}$$

同样,由杆长约束 $l_{S11S12} = h_{42}$,整理并化简得:

$$f(\alpha_2^*) = (-l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 - 2m \sin \gamma - h_{41} \cos \theta_1)^2 + (-a + h_{11} \cos \alpha_1 + h_{12} \cos \alpha_2^* + h_{14} \cos \alpha_3 + 2m \cos \gamma - a)^2 + (h_{11} \sin \alpha_1 + h_{12} \sin \alpha_2^* + l_{13} + l_{14} - h_{41} \sin \theta_1)^2 - h_{42}^2 \quad (10)$$

通过不断改变 α_2^* 的值,可使 $f(\alpha_2^*) = 0$;再将满足 $f(\alpha_2^*) = 0$ 的 α_2^* 代入式(1),即可得到动平台 1 上 P 点的坐标 (x, y, z) ;将 α_2^* 代入式(8),式(9),即可得到动平台 1 的姿态角 γ 。

为方便理解,上述计算过程如图 6 所示。

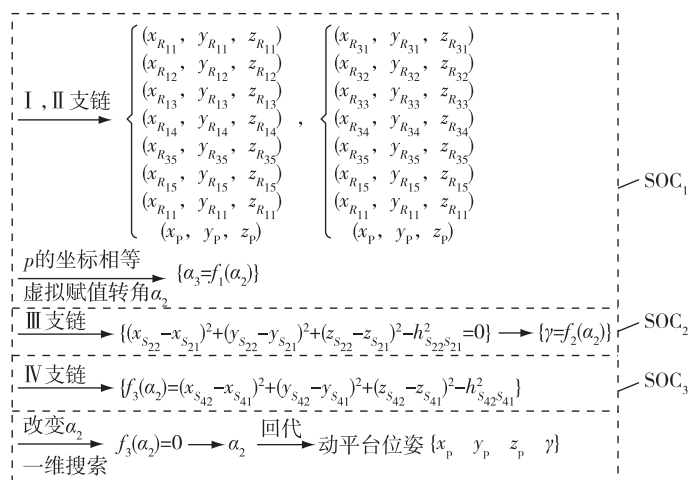


图 6 该并联机构位置正解的流程图

2.2 位置反解

反解问题可描述为:已知动平台 1 的位置 $P(x, y, z)$ 及姿态角 γ , 求输入转角 $\alpha_1, \delta_1, \beta_1, \theta_1$ 。

2.2.1 主动副 R_{11} 的输入角 α_1 的计算

由式(1)中 P 点的 x 坐标可得

$$x = -l_{11} - l_{12} - h_{14} \sin \alpha_3 - m \sin \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \cos \gamma$$

则

$$\alpha_3 = \arcsin \frac{-l_{11} - l_{12} - m \sin \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \cos \gamma - x}{h_{14}} \quad (11)$$

由式(1)中 P 点的 y, z 坐标可得

$$-h_{12} \cos \alpha_2 = P_0 + h_{11} \cos \alpha_1 \quad (12)$$

$$-h_{12} \sin \alpha_2 = P_1 + h_{11} \sin \alpha_1 \quad (13)$$

其中,

$$P_0 = -a + h_{14} \cos \alpha_3 + m \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \sin \gamma - y$$

$$P_1 = l_{13} + l_{14} - z$$

$$P_2 = 2P_1 h_{11}$$

$$P_3 = 2P_0 h_{11}$$

$$P_4 = P_0^2 + P_1^2 + h_{11}^2 - h_{12}^2$$

由式(12),式(13)得

$$P_2 \sin \alpha_1 + P_3 \cos \alpha_1 + P_4 = 0$$

令

$$u_1 = \tan \frac{\alpha_1}{2} \quad (14)$$

解得

$$u_1 = \frac{-P_2 \pm \sqrt{P_2^2 + P_3^2 - P_4^2}}{P_4 - P_3} \quad (15)$$

因此,根据式(14),式(15),可直接求出输入转角 α_1 。

2.2.2 主动副 R_{31} 的输入角 β_1 的计算

由式(2)中的 y 坐标可知

$$y = l_{31} + l_{32} + h_{34} \cos \beta_3 + m \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{3} m \sin \gamma$$

即

$$\beta_3 = \arccos \frac{-l_{31} - l_{32} - m \cos \gamma + \frac{\sqrt{3}}{3} m \sin \gamma + y}{h_{34}} \quad (16)$$

由式(2) P 点的 x, z 坐标可得

$$h_{32} \cos \beta_2 = P_5 - h_{31} \cos \beta_1 \quad (17)$$

$$h_{32} \sin \beta_2 = P_6 - h_{31} \sin \beta_1 \quad (18)$$

其中,

$$P_5 = -b + h_{34} \sin \beta_3 + m \sin \gamma + \frac{\sqrt{3}}{3} m \cos \gamma + x$$

$$P_6 = z - l_{33} - l_{14}$$

$$P_7 = -2P_6 h_{31}$$

$$P_8 = -2P_5 h_{31}$$

$$P_9 = P_5^2 + P_6^2 + h_{31}^2 - h_{32}^2$$

由式(17),式(18)得

$$P_7 \sin \beta_1 + P_8 \cos \beta_1 + P_9 = 0$$

令

$$u_2 = \tan \frac{\beta_1}{2} \quad (19)$$

解得

$$u_2 = \frac{-P_7 \pm \sqrt{P_7^2 + P_8^2 - P_9^2}}{P_9 - P_8} \quad (20)$$

因此,根据式(19),式(20),可直接求出输入转角 β_1 。

2.2.3 主动副 R_{21} 的输入角 δ_1 的计算

由支链 II,易得点 S_{21}, S_{22} 的坐标分别为:

$$\begin{bmatrix} x_{S_{21}} \\ y_{S_{21}} \\ z_{S_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b + h_{21} \cos \delta_1 \\ 0 \\ h_{21} \sin \delta_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_{S_{22}} \\ y_{S_{22}} \\ z_{S_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{2\sqrt{3}}{3} m \cos \gamma \\ y - \frac{2\sqrt{3}}{3} m \sin \gamma \\ z \end{bmatrix}$$

由杆长约束 $l_{S_{21}S_{22}} = h_{22}$,并整理可得

$$Q_1 \sin \delta_1 + Q_2 \cos \delta_1 + Q_3 = 0$$

其中,

$$Q_1 = -2z_p h_{21}$$

$$Q_2 = -2(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}m \cos \gamma + b)h_{21}$$

$$Q_3 = (x - \frac{2\sqrt{3}}{3}m \cos \gamma + b)^2 + (y - \frac{2\sqrt{3}}{3}m \sin \gamma)^2 + z^2 + h_{21}^2 - h_{22}^2$$

令

$$\lambda_1 = \tan \frac{\delta_1}{2} \quad (21)$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2}}{Q_3 - Q_2} \quad (22)$$

因此,根据式(21),式(22),可直接求出输入转角 δ_1 。

2.2.4 主动副 R_{41} 的输入角 θ_1 的计算

由支链Ⅲ,易得点 S_{41}, S_{42} 的坐标分别为:

$$\begin{bmatrix} x_{S41} \\ y_{S41} \\ z_{S41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{41} \cos \theta_1 \\ a \\ h_{41} \sin \theta_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_{S42} \\ y_{S42} \\ z_{S42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{\sqrt{3}}{3}m \cos \gamma - m \sin \gamma \\ y + \frac{\sqrt{3}}{3}m \sin \gamma + m \cos \gamma \\ z \end{bmatrix}$$

由杆长约束 $l_{S41S42} = h_{42}$,并整理可得:

$$Q_4 \sin \theta_1 + Q_5 \cos \theta_1 + Q_6 = 0$$

其中

$$Q_4 = -2zh_{41}$$

$$Q_5 = -2(x + \frac{\sqrt{3}}{3}m \cos \gamma - m \sin \gamma)h_{41}$$

$$Q_6 = (x + \frac{\sqrt{3}}{3}m \cos \gamma - m \sin \gamma)^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{3}m \sin \gamma + m \cos \gamma - a)^2 + z^2 + h_{41}^2 - h_{42}^2$$

令

$$\lambda_2 = \tan \frac{\theta_1}{2} \quad (23)$$

解得

$$\lambda_2 = \frac{-Q_4 \pm \sqrt{Q_4^2 + Q_5^2 - Q_6^2}}{Q_6 - Q_5} \quad (24)$$

因此,根据式(23),式(24),可直接求出输入转角 θ_1 。

由上可知,该机构存在 $2^4=16$ 组反解。

3 位置正反解实例验算

3.1 正解算例

设并联机构的结构参数(单位:cm)为:

$$h_{11}=20.5; l_{11}=0; h_{12}=20; l_{12}=0; l_{13}=6; h_{14}=15; l_{14}=6; h_{31}=20.5; l_{31}=0; h_{32}=20; l_{32}=0; h_{34}=15; l_{33}=6; h_{21}=10; h_{22}=30; h_{41}=10; h_{42}=30; a=30; b=30; m=15。$$

设4个主动输入角为:

$$\alpha_1' = 134.4503^\circ; \beta_1' = 119.4846^\circ; \delta_1' = 142.9988^\circ; \theta_1' = 102.5365^\circ。$$

对式(1)~式(10),设虚拟变量 α_2^* 的范围为 $0 \sim 2\pi$,通过一维搜索,可求得4组实数位置正解,见

表 1。

3.2 逆解算例

将正解的 No. 2 数据结果代入式(14),式(15),式(19)~式(24),可得 16 组实数反解,其中,一组反解即为 4 个主动输入角:

$$\alpha_1' = 134.450\ 3^\circ; \beta_1' = 119.484\ 6^\circ; \delta_1' = 142.998\ 8^\circ; \theta_1' = 102.539\ 9^\circ$$

可见,与正解中给定的 4 个输入角一致,从而验证了其正反解的正确性。

4 3T1R 并联机构的工作空间分析

并联机构的工作空间是衡量并联机器人性能的一个重要指标。采用极限搜索法对该 3T1R 并联机构的工作空间进行分析,即先设定该工作空间的搜索范围,基于机构的运动学逆解,查找该工作空间内所有满足杆长约束、运动副转角约束、连杆干涉约束的点。若其中的任一值超出了其允许值,则对应的点在工作空间外,表示机构此时的位姿是达不到的;若求得的任一值等于其允许值,此时该点位于工作空间的边界。按照这种方法,通过 MATLAB 软件编程,找出机构所有满足条件的位姿点,这些点所构成的三维立体图,即为该机构能够达到的工作空间。

机构的结构参数已在 3.1 中给出。为了找到空间中满足要求的点,先确定空间三维搜索范围: $0 \leq z \leq 50$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq 50$,该搜索范围只需略大于单个杆长的活动半径即可;约束条件: $-\pi \leq \alpha_1(\beta_1, \delta_1, \theta_1) \leq \pi$;通过 Matlab 软件编程,得到该并联机构工作空间的三维立体图及各截面图,分别如图 7、图 8 所示。

组数	x/cm	y/cm	z/cm	$\gamma/(\circ)$
1	-8.154 4	5.769 5	37.148 6	2.589 8
2	-16.597 5	1.067 6	35.725 9	5.334 2
3	-14.786 0	-12.018 6	14.008 8	53.296 5
4	-6.368 9	-8.954 4	24.371 5	61.065 8

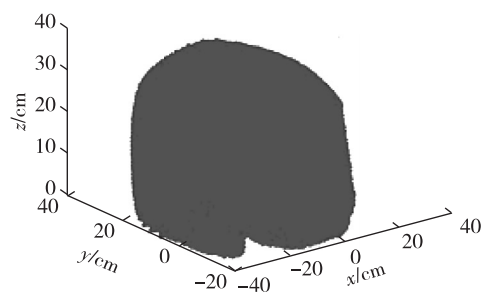


图 7 并联机构的工作空间三维立体图

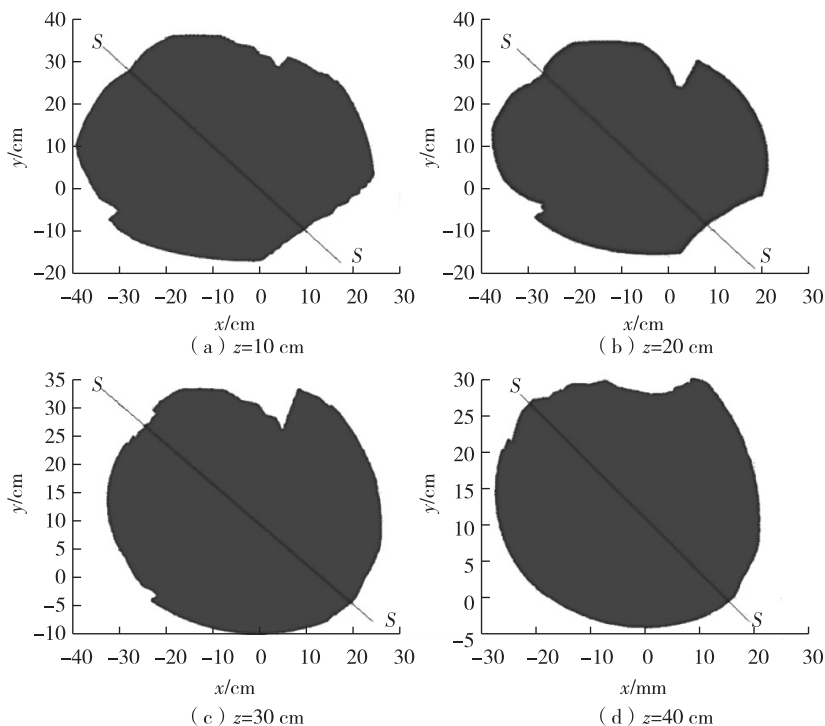


图 8 并联机构的工作空间的 Z 截面图

从图8可看出:

- 1)该并联机构的工作空间 Z 截面图,基本对称于矩形静平台0的对角线 SS 。
- 2)随着 Z 的增加,该并联机构的工作空间 Z 截面图形由不规则图形逐渐演变为规则图形,截面面积也逐渐增大。
- 3)该并联机构的工作空间是连续的,整体较为规则且对称。

5 结 论

- 1)根据基于POC的并联机构拓扑结构设计方法,可清晰地揭示机构的拓扑结构特征。
- 2)因该四自由度SCARA并联机构的耦合度 $k=1$,运用序单开链法建立的机构位置正解算法,可用一维搜索法求解全部实数位置正解,导出的解析公式可为设计人员直接应用,易实现计算机自动生成。为该机构进行动力学、误差分析控制及优化设计打下了良好的基础。
- 3)基于位置反解,得到了该3T1R并联机构的工作空间,发现在结构上具有较好的对称性,为该机构的样机设计及应用奠定了理论基础。

参考文献:

- [1]CIAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space; US4976582A[P]. 1990-12-11.
- [2]PIERROT F,COMPANY O. A new family of 4-dof parallel robots[C]//Proceedings of the IEEE ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. New York:IEEE,1999:508-513.
- [3]KRUT S,COMPANY O,BENOIT M,et al. A new parallel mechanism for SCARA motions[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taiwan:IEEE,2003:1875-1880.
- [4]NABAT V,COMPANY O,KRUT S,et al. Very high speed parallel robot for pick-and-place[C]// Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. New York:IEEE,2005:1202-1207.
- [5]赵铁石,黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论和应用[J]. 机械工程学报,2000,36(10):81-85.
- [6]金琼,杨廷力,刘安心,等. 基于单开链单元的三平移—转动并联机器人机构型综合及机构分类[J]. 中国机械工程,2001,12(9):1038-1043.
- [7]杨廷力,金琼,罗玉峰,等.用于虚轴机床与机器人等的一类(三平移—转动)并联机构:200310106012.4 [P].2004-09-15.
- [8]黄田,刘海涛,李滕. 五自由度机器人:200510014459.8[P]. 2005-12-21.
- [9]刘辛军,谢福贵,王立平,等. 一种可实现SCARA运动的四自由度单动平台并联机构:201210435375.1[P]. 2012-02-13.
- [10]杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- [11]沈惠平,杨廷力,邵国伟,等.一种三平移—转动并联机构机械手:201510650394.X[P].2015-12-09.
- [12]沈惠平,杨廷力,李云峰,等.一种三平移—转动并联机器人抓放器:201510648948.2[P]. 2015-12-09.
- [13]沈惠平,杨廷力,朱伟,等.一种三平移—转动并联机器人平台:201510566840.9[P]. 2015-12-09.
- [14]沈惠平,杨廷力,朱小蓉,等.一种三平移—转动并联机器人:201510564382.5[P].2015-12-09.

(责任编辑:李艳)