

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2019.05.012

# 一种非完全对称新型 Delta-CU 并联机构的动力学分析

李家宇, 孟庆梅, 邓嘉鸣, 沈惠平

(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164)

**摘要:**针对作者提出的一种非完全对称新型三平移 Delta-CU 并联机构的刚体动力学性能问题, 基于虚功原理建立了该并联机构的动力学模型。首先求解出主动臂、从动臂和动平台的速度与加速度; 其次基于达朗贝尔定理, 建立主动臂、从动臂及动平台的静力平衡方程, 计算出机构运动副中的约束反力; 利用虚功原理建立 Delta-CU 机构的动力学模型并对机构进行模态分析, 得到不同振型下机构的固有频率; 最后, 通过算例对动力学模型进行数值计算, 并与 ADAMS 虚拟仿真结果对比, 验证了所建动力学模型的可行性和正确性。

**关键词:**达朗贝尔定理; 虚功原理; 动力学方程; 并联机构

中图分类号: TH 112

文献标志码: A

文章编号: 2095-0411(2019)05-0077-10

## Dynamic Analysis of a Not-Fully- Symmetrical New Delta-CU Parallel Mechanism

LI Jiayu, MENG Qingmei, DENG Jiaming, SHEN Huiping

(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** In view of the dynamic performance of a new type of three translational parallel mechanisms Delta-CU, the dynamic model of parallel mechanism Delta-CU was built based on the principle of virtual work. First, the velocity and acceleration of the driving arm, the driven arm and the moving platform were calculated. Secondly, the static equilibrium equation of the driving arm, the driven arm and the moving platform were established based on the Darren Bell theorem, which could calculate the constraint force of the kinematic pair. Then, the dynamics model of the mechanism was established based the principle of virtual work and modal analysis of the mechanism was carried out to get the natural frequency of different modes of vibration. Finally, a numerical example was given to illustrate the feasibility and correctness of the established dynamic model by comparing with the virtual simulation

收稿日期: 2019-02-24。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51375062, 514755050); 江苏省重点研发计划项目(BE2015043)。

作者简介: 李家宇(1991—), 男, 江苏连云港人, 硕士生。通信联系人: 沈惠平(1965—), E-mail: shp65@126.com

引用本文: 李家宇, 孟庆梅, 邓嘉鸣, 等. 一种非完全对称新型 Delta-CU 并联机构的动力学分析[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2019, 31(5): 77-86.

results from ADAMS.

**Key words:** D'Alembert theorem; the principle of virtual work; dynamic mode; parallel mechanisms

并联机构的动力学研究主要包括机构的受力分析、动力学模型的建立及模态分析等内容。目前动力学研究的方法有牛顿-欧拉法、拉格朗日法、虚功原理法和 Hamilton 法<sup>[1-6]</sup>。Dasgupta<sup>[7]</sup>采用牛顿-欧拉法方程建立 Stewart 平台的动力学方程,对于自由度小于 6 的支链引入了代表中间关约束反力的拉格朗日乘子,建立了 3-PRPS、3-RPS 并联机器人的动力学模型; Pang 等<sup>[8]</sup>采用拉格朗日法建立机器人的动力学模型。Wang<sup>[9]</sup>采用虚功原理研究了并联机构的动力学问题;黄田等<sup>[10]</sup>采用虚功原理建立了 Tricept 和 TriVariant 并联机构的动力学模型,并提出了相应的动力学性能指标;黄真、赵永生<sup>[11]</sup>采用虚功原理建立了 5-UPS/PRPU 并联机床的动力学模型;赵永杰、高峰<sup>[12]</sup>将虚功原理运用于正交式 6 自由度并联机构和含冗余驱动的并联机构动力学建模。虚功原理法可直观地建立操作加速度与关节驱动力(矩)之间的关系,是构建刚体动力学模型的常用方法。

作者提出一种能实现三平移输出的非完全对称新型 Delta-CU 机构<sup>[13]</sup>,本文对该机构动平台进行了速度与加速度分析,在此基础上建立了动力学方程,最后进行了模态分析。首先,根据封闭矢量法建立各支链的运动方程,求导出动平台中心的速度与加速度;然后推导出主、从动臂的速度与加速度映射矩阵,并基于达朗贝尔定理对各杆件进行受力分析;最后,利用各杆件速度映射矩阵求出各杆件的虚位移,采用虚功原理建立动力学模型;最后,采用 Ansys Workbench 进行模态分析,得到 Delta-CU 机构的固有频率、振型,并与 Delta 机器人进行动力学性能的比较。

## 1 动平台中心的速度、加速度的求解

### 1.1 机构描述

图 1(a)所示机构为作者提出的一种新型 Delta-CU 并联机构,该机构由三角形的静平台、动平台,以及两条相同的混合支链 HSOC I,II 和一条无约束的 RSS 型支链 III 组成。

3 条支链中与静平台 0 连接的主动臂的长度相等,RSS 型支链 III 中与动平台 1 连接的杆长与混合支链中平行四边形的长杆相等。机构的全局坐标系  $o-xyz$  原点位于静平台的几何中心  $o$ ,  $y$  轴指向  $A_2$  点,  $x$  垂直于  $oA_2$ ,  $z$  轴由右手法则确定。在静平台 3 个转动副处  $A_i (i=1,2,3)$  分别建立动直角坐标系  $\{A_i\} (i=1,2,3)$ ,图 1(b)支链 I 的坐标。

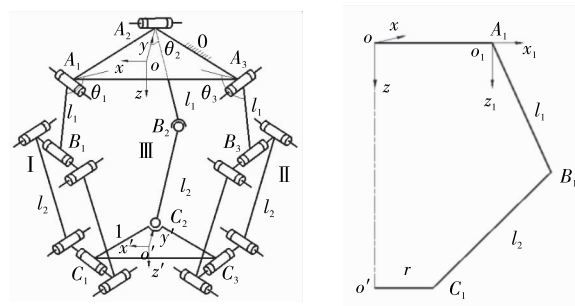


图 1 Delta-CU 机构简图

### 1.2 动平台中心的速度映射矩阵

由矢量法<sup>[14]</sup>求得支链 I (HSOC1)、支链 II (HSOC2)、支链 III (RSS) 满足的位置约束方程  $f(x, y, z) = 0$ , 分别为:

$$[x - (R-r)\cos\theta_1 - l_1\cos\alpha\cos\theta_1]^2 + [y - (R-r)\sin\theta_1 - l_1\cos\alpha\sin\theta_1]^2 + [z - l_1\sin\alpha]^2 - l_2^2 = 0$$

$$[x - (R-r)\cos\theta_2 - l_1\cos\beta\cos\theta_2]^2 + [y - (R-r)\sin\theta_2 - l_1\cos\beta\sin\theta_2]^2 + [z - l_1\sin\beta]^2 - l_2^2 = 0$$

$$[x - (R-r)\cos\theta_3 - l_1\cos\gamma\cos\theta_3]^2 + [y - (R-r)\sin\theta_3 - l_1\cos\gamma\sin\theta_3]^2 + [z - l_1\sin\gamma]^2 - l_2^2 = 0$$

位置约束方程全微分后可表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} &= l_1 \sin \alpha \cos \theta_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + l_1 \sin \alpha \sin \theta_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + l_1 \cos \alpha \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} &= l_1 \sin \alpha \cos \theta_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + l_1 \sin \alpha \sin \theta_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + l_1 \cos \alpha \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} &= l_1 \sin \alpha \cos \theta_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} + l_1 \sin \alpha \sin \theta_3 \frac{\partial f_3}{\partial y} + l_1 \cos \alpha \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2[x - (R-r) \cos \theta_1 - l_1 \cos \alpha \cos \theta_1], \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2[y - (R-r) \sin \theta_1 - l_1 \cos \alpha \sin \theta_1], \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2[z - l_1 \sin \alpha] \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 2[x - (R-r) \cos \theta_2 - l_1 \cos \beta \cos \theta_2], \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2[y - (R-r) \sin \theta_2 - l_1 \cos \beta \sin \theta_2], \frac{\partial f_2}{\partial z} = 2[z - l_1 \sin \beta] \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= 2[x - (R-r) \cos \theta_3 - l_1 \cos \gamma \cos \theta_3], \frac{\partial f_3}{\partial y} = 2[y - (R-r) \sin \theta_3 - l_1 \cos \gamma \sin \theta_3], \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2[z - l_1 \sin \gamma] \end{aligned}$$

对式(1)两边同时除以  $dt$  得:

$$\mathbf{J}_{01} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{02} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

式中:

$$\mathbf{J}_{01} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}; \mathbf{J}_{02} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix};$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

当机构不在奇异位置时  $\mathbf{J}_{01}$  可逆,则

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{01}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{02} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

令  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{01}^{-1} \mathbf{J}_{02}$ , 则

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3)$$

式(3)即为动平台中心的速度正解。

### 1.3 动平台中心的加速度映射矩阵

对式(1)求导构成加速度映射矩阵如下

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

式中:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \frac{d\alpha}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \frac{d\alpha}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \\
 &2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \frac{d\alpha}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \\
 k_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \frac{d\beta}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \frac{d\beta}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \\
 &2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \frac{d\beta}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \right) \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \\
 k_3 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \frac{d\gamma}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \frac{d\gamma}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \\
 &2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \frac{d\gamma}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2
 \end{aligned}$$

当机构不在奇异位置时,  $J_{01}$  可逆, 则

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} = 0 \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{01}^{-1} \mathbf{J}_{02}$ ;  $\mathbf{K} = \mathbf{J}_{01}^{-1} \mathbf{K}_0$ ;  $\mathbf{K}_0 = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ 。式(5)即为动平台中心的加速度正解。

## 2 主、从动臂质心的速度及加速度求解

### 2.1 主动臂的质心速度

在坐标系  $o_1-x_1y_1z_1$  中, 支链 I 的主动臂绕  $y_0$  轴做定轴转动, 主动臂的质心速度矩阵表达式为

$$\mathbf{v}_{11} = \left[ \frac{1}{2} l_1 \cos \alpha \quad 0 \quad \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha \right]^T \cdot [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

同理, 第 II, III 支链主动臂质心速度分别为:

$$\mathbf{v}_{21} = \left[ \frac{1}{2} l_1 \cos \beta \quad 0 \quad \frac{1}{2} l_1 \sin \beta \right]^T \cdot [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{v}_{31} = \left[ \frac{1}{2} l_1 \cos \gamma \quad 0 \quad \frac{1}{2} l_1 \sin \gamma \right]^T \cdot [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

记为

$$\mathbf{v}_{i1} = \mathbf{J}_{i1} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{J}_{11} = \left[ \frac{1}{2} l_1 \cos \alpha \quad 0 \quad \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha \right]^T \cdot [1 \quad 0 \quad 0]$ ;  $\mathbf{J}_{21} = \left[ \frac{1}{2} l_1 \cos \beta \quad 0 \quad \frac{1}{2} l_1 \sin \beta \right]^T \cdot [0 \quad 1 \quad 0]$ ;

$$\mathbf{J}_{31} = \left[ \frac{1}{2} l_1 \cos \gamma \quad 0 \quad \frac{1}{2} l_1 \sin \gamma \right]^T \cdot [0 \quad 0 \quad 1]; \dot{\mathbf{q}} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$$

### 2.2 从动臂的角速度

从动臂的质心位于平行四边形的中心, 不考虑 4 个转动副之间的内力, 则从动臂质心速度

$$\mathbf{v}_{i2} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{iB} + \mathbf{v}_{iC}) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{iB} + \mathbf{v}_{o'}) = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{iB} + \mathbf{J}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (8)$$

式中  $\mathbf{J}_{i2} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{iB} + \mathbf{J})$ 。

由矢量法可得第 I 支链

$$\mathbf{OA}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{O} = \mathbf{OO}' \quad (9)$$

式(9)两边同时对  $t$  求导,则有  $l_1 \dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{u}_1 + l_2 \boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{o'}$  (10)

$$l_2 \boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{o'} - \boldsymbol{v}_{1B} \quad (11)$$

式中:  $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1$  分别是主动臂 I 的方向向量 ( $\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1$ )、从动臂 I 的方向向量 ( $\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1$ ) 的单位向量。式(11)两边同时用  $\boldsymbol{v}_1$  左点乘,得

$$l_2 \boldsymbol{\omega}_{12} = \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_{o'} - \boldsymbol{v}_{1B})$$

而  $\boldsymbol{v}_1$  是  $\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1$  的单位向量

$$\boldsymbol{v}_1 = \left[ \frac{1}{l_2} (R - r) \cos \theta_1 - l_1 \cos \alpha \cos \theta_1, (R - r) \sin \theta_1 + \frac{l_1}{l_2} \cos \alpha \sin \theta_1, l_1 \sin \alpha \right]$$

则向量  $\boldsymbol{v}_i$  在坐标系  $o_1-x_1y_1z_1$  中的坐标方阵<sup>[15]</sup>为

$$[\tilde{\boldsymbol{v}}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -v_{1z} & v_{1y} \\ v_{1z} & 0 & v_{1x} \\ -v_{1y} & v_{1x} & 0 \end{bmatrix}$$

则从动臂角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{12} = \frac{1}{l_2} \cdot {}^0_1 \boldsymbol{R} \cdot [\tilde{\boldsymbol{v}}_1] \cdot ({}^0_1 \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{v}_{1B}) = \boldsymbol{J}_{\omega 12} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \quad (12)$$

式中:

$$\boldsymbol{J}_{\omega 12} = \frac{1}{l_2} \cdot {}^0_1 \boldsymbol{R} \cdot [\tilde{\boldsymbol{v}}_1] \cdot (\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}_{1B})$$

$${}^0_1 \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对式(10)求导,得动平台中心的加速度矢量形式为

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{o'} = l_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} \times \boldsymbol{u}_1 + l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{u}_1) + l_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} \times \boldsymbol{v}_1 + l_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1) \quad (13)$$

式(13)两端同时用  $\boldsymbol{v}_1$  点乘,得

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_{o'} = \boldsymbol{v}_1 \cdot l_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} \times \boldsymbol{u}_1 + l_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{u}_1) + l_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1)$$

进一步,两边同时左点乘  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \neq 0$  得

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{o'} = l_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} \times \boldsymbol{u}_1 + l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{u}_1) + l_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1) \quad (14)$$

在坐标系  $o_1-x_1y_1z_1$  中:

$$\boldsymbol{v}_{11} = \frac{1}{2} l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{11} \times \boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{v}_{1B} = l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{11} \times \boldsymbol{u}_1$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{1B} = l_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} \times \boldsymbol{u}_1 + l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{11} \times (\boldsymbol{\omega}_{11} \times \boldsymbol{u}_1)$$

则从动臂质心的加速度为

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{12} = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{v}}_{1B} + \dot{\boldsymbol{v}}_{o'}) = l_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} \times \boldsymbol{u}_1 + l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{11} \times (\boldsymbol{\omega}_{11} \times \boldsymbol{u}_1) + \frac{1}{2} l_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1) \quad (15)$$

从动臂的角加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} \times \boldsymbol{u}_1 + l_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{u}_1) + \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\boldsymbol{\omega}_{12} \times \boldsymbol{v}_1) - \dot{\boldsymbol{v}}_{o'} \quad (16)$$

### 3 各构件的受力分析

由于 Delta-CU 机构 3 条支链的结构已不同,为保证其质量对称性,采用质量代换法<sup>[16-17]</sup>,通过改变

RSS 支链中从动臂的材料及直径,使得该从动臂质量与平行四边形质量相等,从而保证该支链的转动惯量不发生变化,更好地保证机构运行的平稳性。根据达朗贝尔原理,在任意运动瞬时,虚加于质点系中各质点的惯性力、力矩与作用于该质点系上的主动力、约束力将组成一平衡力系。忽略各运动副之间的摩擦力时,易求得各构件力平衡方程。

### 3.1 主动臂的受力分析

由达朗贝尔定理有

$$\mathbf{F}_{1a} + \mathbf{F}_{1b} + m_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{111} = 0 \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{F}_{111}$  为惯性力;  $\mathbf{F}_{1a}$  为主动臂在运动副  $A_1$  处所受的约束力;  $\mathbf{F}_{1b}$  为主动臂在运动副  $B_1$  处所受的约束力。

由于主动臂在坐标系  $o_1-x_1y_1z_1$  的  $y_1o_1z_1$  平面内作定轴转动,可得沿  $y_1$  轴方向的力矩平衡方程为

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{F}_{1b} \times \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \cdot (1, 0, 0)^T + m_1 \mathbf{g} \times \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{M}_{111} = 0 \quad (18)$$

式中  $\mathbf{M}_{111}$  为第 I 支链主动臂所受的惯性力矩。

### 3.2 从动臂的受力分析

从动臂空间力系向坐标系  $o_1-x_1y_1z_1$  的  $A_1$  点简化,并由达朗贝尔定理,得到平衡方程为

$$\mathbf{F}_{1b} + \mathbf{F}_{1c} + m_2 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{112} = 0 \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{F}_{112}$  为惯性力;  $\mathbf{F}_{1b}$  为从动臂在运动副  $B_1$  处所受的约束力;  $\mathbf{F}_{1c}$  为从动臂在运动副  $C_1$  处所受的约束力。

在坐标系  $o_1-x_1y_1z_1$  中,根据支链 I 从动臂的力矩平衡条件,当仅考虑主动臂力矩的  $y_1$  轴的分量可得

$$\left[ \mathbf{F}_{1b} \times \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{F}_{1c} \times (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1) + m_2 \mathbf{g} \times (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1) + \mathbf{M}_{112} \right] \cdot (1, 0, 0)^T = 0 \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{F}_{1b}, \mathbf{F}_{1c}$  为  $B_1, C_1$  处的约束力;  $\mathbf{M}_{112}$  为第 I 支链从动臂平行四边形所受的惯性力矩。

### 3.3 动平台的受力分析

对于动平台,由达朗贝尔定理有

$$m_0 \mathbf{g} + \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_{ic} + \mathbf{F}_{10} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{F}_0$  为动平台外部载荷惯性力;  $\mathbf{F}_{ic}$  为运动副  $C_i$  处所受的约束力;  $\mathbf{F}_{10}$  为动平台所受的惯性力。

根据式(17)~式(21)动平台及主从动臂的力平衡方程,并结合虚位移原理可进一步求解各运动副间的约束力。

## 4 机构动力学方程的建立及算例分析

### 4.1 机构动力学方程

在全局坐标系  $o-xyz$  中,由虚功原理得

$$\mathbf{M}_1 \cdot \delta_{\alpha} + \mathbf{M}_2 \cdot \delta_{\beta} + \mathbf{M}_3 \cdot \delta_{\gamma} = \mathbf{F}_0^T \cdot \delta_{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_{10}^T \cdot \delta_{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{i1}^T \cdot \delta_{\mathbf{x}_{i1}} + \mathbf{M}_{i1} \cdot \delta_{\theta_{i1}}) +$$

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{li2}^T \cdot \delta \mathbf{x}_{i2} + \mathbf{M}_{li2} \cdot \delta \theta_{i2}) \quad (i=1,2,3) \quad (22)$$

式中:  $\delta_a, \delta_\beta, \delta_\gamma$  分别为 3 条主动臂虚拟转动角度。

由式(3),式(7),式(8),式(12)分别得:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{q}; \delta \mathbf{x}_{i1} = \mathbf{J}_{i1} \cdot \mathbf{q}; \delta \mathbf{x}_{i2} = \mathbf{J}_{i2} \cdot \mathbf{q}; \delta \theta_{i2} = \mathbf{J}_{\omega i2} \cdot \mathbf{q}$$

代入式(22)得

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}_0^T \cdot \mathbf{F}_0 + \mathbf{J}_0^T \cdot \mathbf{F}_{l0} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{J}_{i1}^T \cdot \mathbf{F}_{li1} + \mathbf{M}_{li1}) + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{J}_{i2}^T \cdot \mathbf{F}_{li2} + \mathbf{J}_{\omega i2} \mathbf{M}_{li2}) \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3)^T$  为主动臂输入转矩;  $\mathbf{F}_0 = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z)^T$  为动平台的外部作用力。

## 4.2 动平台速度与加速度算例与仿真

Delta-CU 并联机构的部分结构参数见表 1, 虚拟样机模型如图 2 所示。

表 1 Delta-CU 并联机构部分结构参数

参数	数值	参数	数值
第 I,II 支链主动臂杆长 $l_1/\text{mm}$	190	动平台密度 $\rho_1/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 700
第 I,II 支链主动臂外径 $r_1/\text{mm}$	40	动平台质量 $m_1/\text{kg}$	0.217 9
第 I,II 支链从动臂杆长 $l_2/\text{mm}$	390	动平台外接圆半径 $R_1/\text{mm}$	51
第 I,II 支链从动臂外径 $r_2/\text{mm}$	16	静平台密度 $\rho_2/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 870
第 I,II 支链主、从动臂材料 $\rho_3/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 000	静平台外接圆半径 $R_2/\text{mm}$	87
第 III 支链从动臂杆长 $l_3/\text{mm}$	390	主动臂整体质量 $m_2/\text{kg}$	0.254 8
第 III 支链从动臂材料 $\rho_4/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 870	从动臂整体质量 $m_3/\text{kg}$	0.077 1
第 III 支链从动臂外径 $r_3/\text{mm}$	20		

假设支链 I,II,III 主动臂的运动输入角分别为:

$$\alpha = \cos(\frac{\pi}{5}t); \beta = -\cos(\frac{\pi}{5}t); \gamma = \cos(\frac{\pi}{5}t)$$

根据动平台的速度和加速度方程(3)和(6),得到动平台中心对应每个时刻的速度与加速度数值,分别如表 2、表 3 所示。将图 2 中的虚拟样机通过 Adams 仿真得到动平台中心的速度、加速度曲线,分别如图 3、图 4 所示。由速度与加速度仿真曲线(图 3、图 4),和 Matlab 中计算结果(表 2、表 3)进行比较,可知,两者结果一致,从而验证了方法的正确性和有效性。

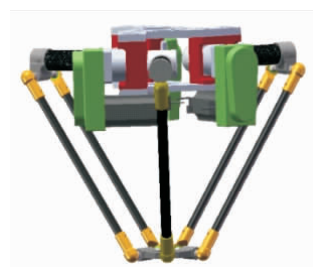


图 2 Delta-CU 虚拟样机模型

表 2 动平台中心的速度分析

时间/s	动平台速度/(mm · s <sup>-1</sup> )		
	x	y	z
0	0.00	0.00	0.00
1	-79.20	43.20	92.30
2	-209.00	122.00	49.50
3	-181.00	105.00	-10.80
4	-69.70	37.80	-86.70
5	0.00	0.00	0.00

表 3 动平台中心的加速度分析

时间/s	动平台加速度/(mm · s <sup>-2</sup> )		
	x	y	z
0	-62.70	29.20	109.00
1	-111.00	67.40	55.40
2	-101.00	59.90	-159.0
3	126.00	-75.40	-66.60
4	83.60	-50.20	71.20
5	67.60	-23.50	95.60

## 4.3 主动臂驱动力矩算例与仿真

根据式(23)计算出 3 条主动臂的输入转矩,分别见表 4、表 5、表 6。驱动力矩曲线如图 5~图 7 所示。

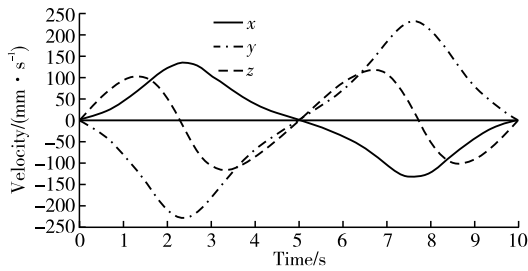


图 3 动平台中心的速度曲线

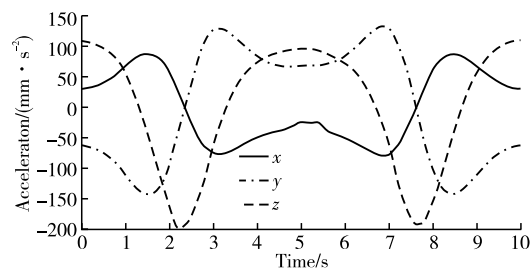


图 4 动平台中心的加速度曲线

表 4 主动臂 I 的转矩算例

时间/s	主动臂 I 转矩/(N·mm)		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
0	3 004.216	5 209.801	6.485
1	2 956.351	5 126.797	6.383
2	2 174.312	3 770.301	4.693
3	243.502	422.272	0.526
4	-1 038.569	-1 801.048	-2.242
5	-1 505.38	-2 610.575	-3.250

表 5 主动臂 II 的转矩算例

时间/s	主动臂 II 转矩/(N·mm)		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
0	810.950	0.423	-1.639
1	415.204	0.216	-0.840
2	-1 150.498	-0.600	2.326
3	-2 705.968	-1.411	5.471
4	-2 124.554	-1.108	4.296
5	-1 924.884	-1.003	3.892

表 6 主动臂 III 的转矩算例

时间/s	主动臂 III 转矩/(N·mm)		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
0	-258.344	446.919	-0.562
1	-110.394	190.975	-0.240
2	661.579	-1 144.492	1.439
3	1 498.542	-2 592.387	3.259
4	1 230.477	-2 128.651	2.676
5	951.241	-1 645.590	2.069

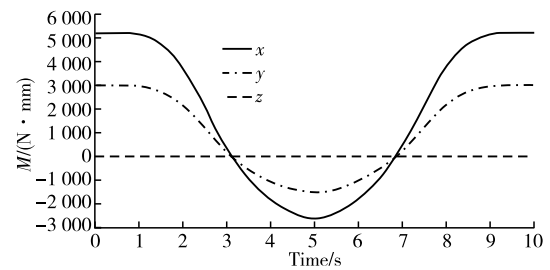


图 5 主动臂 I 的驱动力矩曲线

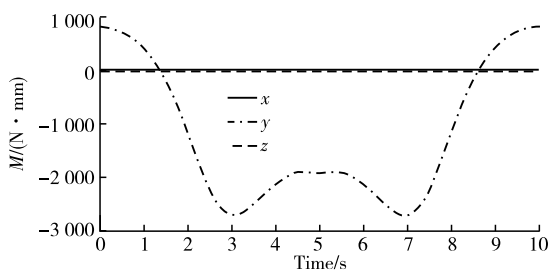


图 6 主动臂 II 的驱动力矩曲线

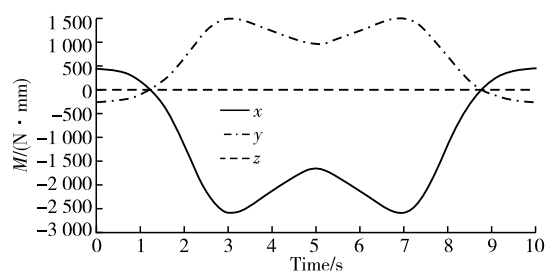


图 7 主动臂 III 的驱动力矩曲线

3 条支链输入转矩仿真曲线与机构动力学模型计算结果比较:

1) 支链 I, III 的力矩  $M_1, M_3$  仿真结果与理论计算结果一致(全局坐标系  $o-xyz$  中  $x, y$  轴的分量);  $z$  轴分量力矩计算结果不为 0, 但远小于  $x, y$  轴的分量数值, 且误差在允许范围之内;

2) 支链 II 的力矩  $M_2$  仿真结果与理论计算结果一致(全局坐标系  $o-xyz$  中  $x$  轴分量);  $y, z$  轴分量计算结果不为 0, 但远小于  $x$  轴的分量数值, 且误差在允许范围之内;

仿真结果与理论计算结果是一致的, 从而验证了动力学建模的正确性。



### 4.3 Delta-CU 机构的模态分析

为进一步研究 Delta-CU 机构的固有动态性能,对机器人的整机进行模态分析,得出前六阶频率以及对应的振型如图 8 所示。

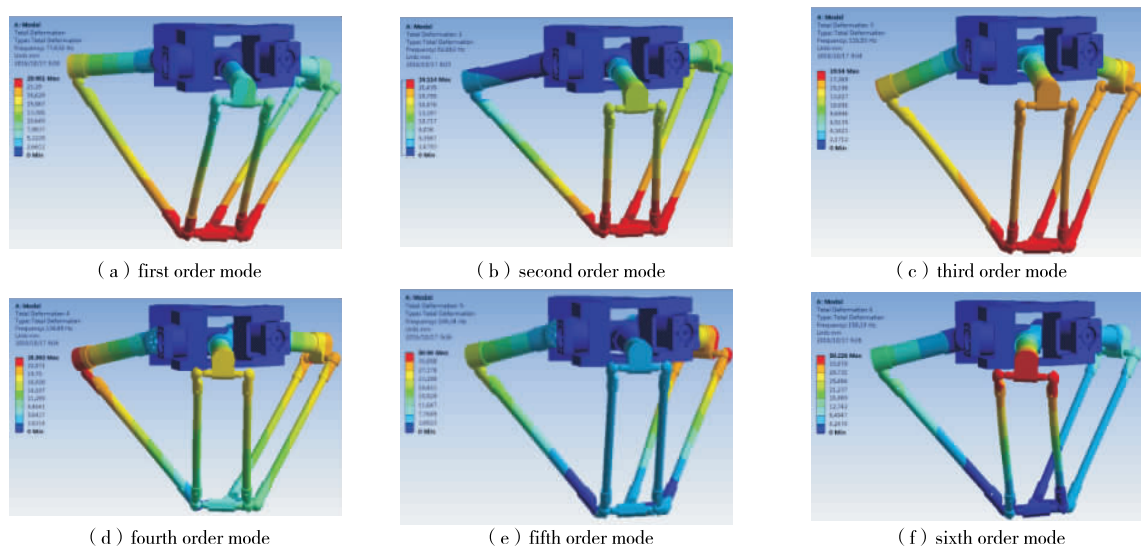


图 8 模态分析

由模态分析结果可知:

- 1) 第 1~3 阶模态的振型主要由动平台及从动臂与动平台相连接的运动副附近变形引起,因此,在后续优化过程中,应重点考虑改善从动臂的动态特性;
- 2) 第 4~6 阶模态的振型可知,固有频率继续增加时,主动臂与从动臂之间的转动副附近变形量会增大。

## 5 结 论

1) 分析求解了一种新型 Delta-CU 机构各构件的速度与加速度及它们的受力;基于虚功原理建立了机构的动力学方程,并得到动平台外载与各主动臂驱动力矩变化曲线规律;当机构尺寸参数相等,各构件质量及输入函数保持一致时,Delta-CU 机构与 Delta 机构各主动臂的驱动力矩曲线形态大致相同,但 Delta 机构的力矩各分量数值总体比 Delta-CU 机构数值偏大。可见 Delta-CU 机构动力学性能更好。

2) 对 Delta-CU 机构的模态分析发现,第 1~3 阶模态振型主要是对从动臂与动平台有影响,第 4~6 阶振型主要对从动臂与主动臂连接关节有影响,因此,优化时应着重考虑从动臂与动平台的连接关节、从动臂与主动臂连接关节以及从动臂动态特性的改善。

上述工作对 Delta-CU 操作手的样机研发、调试及实际运行奠定了理论基础。

### 参考文献:

- [1] AZIZI M R, NADERI D. Dynamic modeling and trajectory planning for a mobile spherical robot with a 3 Dof inner mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 64(1): 251-261.
- [2] 陈修龙, 孙德才, 王清. 基于拉格朗日的冗余驱动并联机构刚体动力学建模[J]. 农业机械学报, 2015, 46(12):

- 329-336.
- [3]鹿玲,姚建涛,顾伟栋,等.基于 Kane 方程的冗余驱动 5UPS/PRPU 并联机床动力学分析[J].农业机械学报,2016,47(6):365-372.
- [4]CODOUREY A. Dynamic modeling of parallel robots for computed-torque control implementation[J]. The International Journal of Robotic Research,1998,17(2):1325-1336.
- [5]KRUT S,COMPANY O,NABAT V,et al. Heli4:A parallel robot for SCARA motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C]// Proceedings of International Conference on Intelligent Robots and Systems. New York: [s.n.],2006:1656-1661.
- [6]LI M,HUANG T,MEI J P,et al. Dynamic formulation and performance comparison of the 3-DOF modules of two reconfigurable PKMs—the tri-variant and the tricept[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(6): 1129-1136.
- [7]DASGUPTA B,MRATHYUNJAYA T S.A ewton-euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory,1998,33(8): 1135-1152.
- [8]PANG H,SHAHINPOOR M. Inverse dynamics of a parallel manipulator[J].Journal of Robotic Systems, 1994, 11(8):693-702.
- [9]WANG J, GOSSELIN G M. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators[J].Multibody System Dynamics,1998,2(3):317-334.
- [10]黄真,赵永生,赵铁石.高等空间机构学[M].北京:高等教育出版社,2006:89-210.
- [11]张利敏.基于动力学指标的 Delta 高速并联机械手集成优化设计方法研究[D].天津:天津大学,2011.
- [12]ZHAO Y J, GAO F. Inverse dynamics of the 6-dof out-parallel manipulator by means of the principle of virtual work [J].Robotica, 2009, 27(2):259-268.
- [13]杨廷力,刘安心,罗玉峰,等.机器人机构拓扑结构设计[M].北京:科学出版社,2012.
- [14]蔡自兴.机器人学基础[M].北京:机械工业出版社,2015.
- [15]张劲夫.高等动力学[M].北京:科学出版社,2004.
- [16]哈尔滨工业大学理论力学考研室.理论力学[M].北京:高等教育出版社,2009.
- [17]石端伟,王晓笋,刘照,等.机械动力学[M].北京:中国电力出版社,2012.

(责任编辑:李艳)

【上接第 69 页】

- [14]WU S W, ZHOU X G, CAO G M, et al. The improvement on constitutive modeling of Nb-Ti micro alloyed steel by using intelligent algorithms[J]. Materials & Design, 2017, 116(15): 676-685.
- [15]RAZAVI S A, ASHRAFIZADEH F, FOOLADI S. Prediction of age hardening parameters for 17-4PH stainless steel by artificial neural network and genetic algorithm[J]. Materials Science and Engineering: A, 2016, 675(15): 147-152.
- [16]王迎娜,梁志芳,李午申. X70 管线钢环焊接头 CTOD 断裂韧性的神经网络[J].压力容器,2007,24(6): 6-9, 16.
- [17]曾卫东,舒滢,周义刚.应用人工神经网络模型预测 Ti-10V-2Fe-3Al 合金的力学性能[J].稀有金属材料与工程,2004,33(10): 1041-1044.
- [18]黄志斌,万敏,伍惠,等. TC4 钛合金神经网络本构模型及在有限元模拟中应用[J].塑性工程学报,2013,20(1): 89-94.

(责任编辑:李艳)