

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2020.03.008

一种新型单输入 3T1R 输出并联机构 设计及其运动学分析

王一熙, 沈惠平, 孟庆梅, 邓嘉鸣

(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164)

摘要:少输入-多输出(Fi-Mo)并联机构具有较好的应用前景,但其研究、设计与应用还较少。首先提出一种新型的单输入 3T1R 输出并联机构,并对该机构的方位特征(POC)集、自由度(DOF)及耦合度(κ)等主要拓扑特征进行分析计算,证明其耦合度 $\kappa = 1$;然后,根据基于有序单开链法的运动学建模原理,给出了该机构的位置正解的求解方法;同时,导出机构位置逆解方程,得到其雅可比矩阵,并进一步导出了动平台输出速度和加速度计算公式。最后,设计了用于三平移-转动振动筛分装置的主机构的虚拟样机。

关键词:单自由度;少输入-多维输出;运动学;雅可比矩阵

中图分类号:TK 8

文献标志码:A

文章编号:2095-0411(2020)03-0053-10

Design and Kinematics Analysis of a Novel 3T1R Parallel Mechanism with Single Degree of Freedom

WANG Yixi, SHEN Huiping, MENG Qingmei, DENG Jiaming

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: The Fewer-input and More output (Fi-Mo) parallel mechanism (PM) has potential applications. However its investigation and application are fewer. This paper proposes a novel Fi-Mo PM with a single input and outputs of three-translation and one-rotation (3T1R). An analysis for main topological characteristics of the PM is also performed, including position orientation characteristics (POC), degree of freedom (DOF) and Coupling Degree (κ), which proves its coupling degree κ is one. Then, according to the kinematics modeling principle based on ordered single opened chain(SOC), proposed in author's early work, the solving methods for the forward position problem of the PM are given. At the same time, the inverse position solution equations are derived, and Jacobian matrix is obtained

收稿日期:2019-10-13。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51375062,514755050)。

作者简介:王一熙(1993—),男,江苏常州人,硕士生。通信联系人:沈惠平(1965—),E-mail:shp65@126.com

引用本文:王一熙,沈惠平,孟庆梅,等.一种新型单输入 3T1R 输出并联机构设计及其运动学分析[J].常州大学学报(自然科学版),2020,32(3):53-62.

through the constraint relation of the PM. In addition, the output velocity and acceleration calculation formula are obtained that is verified by a numerical example. Last, a prototype of parallel vibration screen based on this 1-DOF 3T1R Fi-Mo PM is designed and illustrated. This work lays a theoretical foundation for the design and application of the PM.

Key words: single input; fewer inputs and more outputs; kinematics; jacobian matrix

目前,人们对单自由度空间并联机构的研究还较少。李树军等^[1]利用空间凸轮机构将一个运动输入分解成多个耦合的分传动输出;SANCISI 等^[2]利用一种单自由度球腕模型,对人体膝盖的被动运动情况进行建模;FRANCI 等^[3]设计了一种等效的单自由度空间机构模型,研究人体关节处韧带和关节面如何引导被动关节的运动。

在文献[4-6]提出研制单自由度并联运动振动筛的基础上,首次提出了“少输入-多输出(Fi-Mo)并联机构”的概念,并给出了该类机构的驱动输入 W 、自由度 F 及动平台输出维数 N 三者之间的关系^[7],同时,提出了 Fi-Mo 机构的两种设计方法^[8]。据此,设计了大量的 Fi-Mo 并联机构(含单自由度)^[9-14],还拓展 Fi-Mo 并联机构的应用,发明设计了基于单输入的三转动输出并联机构的肩关节康复训练机^[15]、并联式脚底按摩机^[16],以及多种输出形式的单自由度并联振动筛^[17],为新型节能装备的设计、研发奠定了理论基础。但对这些 Fi-Mo 并联机构运动学、动力学的相关研究还较少^[18]。

首先提出一种单输入 3T1R 输出的 Fi-Mo 并联机构,然后,分析得到了该机构的方位特征、自由度、耦合度等拓扑特征,并给出了其运动学的正逆解,还通过求解机构的雅可比矩阵,分析了动平台的输出速度和输出加速度变化规律。该机构可用于三平移—转动振动筛分装置的主机构。

1 机构拓扑分析

1.1 机构设计

提出的一种新型单输入 3T1R 输出并联机构^[19],如图 1 所示。该机构由动平台 1、静平台 0、1 条简单支链 $R_{31}S_{32}$ 和 1 条混合支链并联组成。混合支链由支链 I $\{-R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{14}-\}$ 与支链 II $\{-R_{21} \parallel R_{22} \perp R_{23} \parallel R_{24}-\}$ 并联后,再串联运动副 R_{15} 构成, R_{15} 和 R_{24} 共轴线,且为动平台 1 的法线。这样,该混合支链的拓扑表示为 $\{(-R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{14} \parallel R_{24} \parallel R_{23} \perp R_{22} \parallel R_{21})-R_{15}-\}$,其中符号 \parallel 、 \perp 分别表示平行、垂直关系。

1.2 机构的拓扑分析

1.2.1 机构的 POC 集分析

1) 串联、并联机构的方位特征方程^[20],分别为:

$$\mathbf{M}_{bj} = \bigcup_{i=1}^{m_j} \mathbf{M}_{ji} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_{Pa} = \bigcap_{j=1}^{v+1} \mathbf{M}_{bj} \quad (2)$$

式中: \mathbf{M}_{bj} 为第 j 条支链末端的 POC 集; \mathbf{M}_{ji} 为第 i 个运动副的 POC 集; m_j 为第 j 条支链中的运动副数; \mathbf{M}_{Pa} 为机构动平台的 POC 集; v 为机构回路数($v=m-n+1$, n 为构件数)。

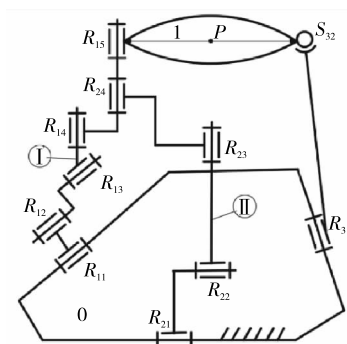


图 1 新型单输入 3T1R 并联机构

Fig.1 Anovel 3T1R parallel mechanism with single degree of freedom

2) 确定各条支链末端构件上的 POC 集

① 选动平台 1 的几何中心 P 为基点。

② 设混合支链、简单支链的 POC 集为 \mathbf{M}_{bh} , \mathbf{M}_{bs} , 其计算如下:

$$\mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{13}) \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{14}) \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{13}, R_{14})) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{II} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{22}) \\ r^1(\parallel R_{22}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{24}) \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{22}, R_{24})) \end{bmatrix}$$

因

$$\mathbf{M}_{I-II} = \mathbf{M}_I \cap \mathbf{M}_{II} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{13}, R_{14})) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{22}, R_{24})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix}$$

因此,

$$\mathbf{M}_{bh} = \mathbf{M}_{I-II} \cup \mathbf{M}_{R_{15}} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{15}) \\ r^1(\parallel R_{15}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{bs} = \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{31}) \\ r^1(\parallel R_{31}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

3) 确定动平台 1 的 POC 集

$$\mathbf{M}_{Pa} = \mathbf{M}_{bh} \cap \mathbf{M}_{bs} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{15}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{15}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

因此, 动平台 1 可产生三平移及绕转动副 R_{15} (见图 1) 轴线的转动。

1.2.2 机构的自由度计算

1) 并联机构的全周 DOF 公式^[20]为

$$F = \sum_{i=1}^M f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (5)$$

其中

$$\sum_{j=1}^v \xi_{Lj} = \dim. \{ (\bigcap_{j=1}^v \mathbf{M}_{bj}) \cup \mathbf{M}_{b(j+1)} \} \quad (6)$$

式中: F 为机构自由度; f_i 为第 i 个运动副的自由度; M 为机构的运动副数目; ξ_{Lj} 为第 j 个独立回路的独立位移方程数; $\bigcap_{j=1}^v \mathbf{M}_{bj}$ 为前 v 条支链组成的子并联机构 POC 集; $\mathbf{M}_{b(j+1)}$ 为第 $(j+1)$ 条支链末端构件的 POC 集。

2) 此机构可分解为包含 2 个回路, 即: 由 I 和 II 支链构成的回路为第 1 单开链 (SOC_1), 为 $\{-R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{14} \parallel R_{24} \parallel R_{23} \perp R_{22} \parallel R_{21}-\}$; 由 $\{-R_{15}-S_{32}-R_{31}-\}$ 构成第 2 单开链 (SOC_2)。

这样, 由式(6), 分别确定第 1, 2 单开链的独立位移方程数 ξ_{L1} , ξ_{L2} 为:

$$\xi_{L1} = \dim. \{ \mathbf{M}_I \cup \mathbf{M}_{II} \} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

$$\xi_{L2} = \dim. \{ \mathbf{M}_{I-II} \cup \mathbf{M}_{\text{SOC}_2} \} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

于是, 由式(5)知

$$F = \sum_{i=1}^M f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} = (8 + 5) - (6 + 6) = 1$$

因机构的 DOF 为 1, 由式(4)可知, 如图 1 当静平台 0 上的转动副 R_{11} 为驱动副时, 动平台 1 可生三

平移及一个绕转动副 R_{15} 轴线的转动,但仅有一个独立元素,其余都为伴随运动。

1.2.3 机构耦合度计算

由基于单开链(SOC)的机构组成原理可知,任一机构可分解为一系列单开链,第 j 个单开链(SOC_j)的约束度定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} \quad (7)$$

式中 I_j 为第 j 个 SOC_j 中的驱动副数。

进一步, v 个有序的 SOC 可构成一个独立回路数为 v 的子运动链(Sub-Kinematic Chain,记作 SKC)^[20],对一个 SKC 而言,须

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0$$

因此,耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (8)$$

式中 $\min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\}$ 为 SKC 分解为 v 个 $SOC(\Delta_j)$,可有多种分配方案,取 $(\sum |\Delta_j|)$ 的最小值。 κ 揭示了机构基本回路变量之间的关联、依赖程度; κ 值越大,机构的运动学、动力学分析越复杂^[20]。

由 1.2.2 节可知第 1,2 回路的独立位移方程数为 $\xi_{L_1} = \xi_{L_2} = 6$,因此,由式(7)可分别计算 SOC_1 和 SOC_2 的约束度 Δ_1, Δ_2 ,为:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 8 - 1 - 6 = +1 \\ \Delta_2 &= \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 5 - 6 = -1 \end{aligned}$$

于是,由式(8)计算机构的耦合度 κ 为

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 |\Delta_j| = \frac{1}{2} (|-1| + |-1|) = 1$$

由上可知,该机构只包含 1 个 SKC,其耦合度为 1,因此,位置求解时,需预设一个虚拟输入变量,即可求出机构运动学正解。

2 机构位置分析

2.1 基于序单开链的机构位置正解求解原理

基于序单开链的机构组成原理^[20]可知,机构可分解为若干个 SKC,而每个 SKC 可分解为一系列约束度为正值、0、负值的单开链。因此,机构位置正解的求解,可转化为 SKC 内 3 种单开链的位置求解,而 3 种单开链的约束特性及其建模方法为:

1) 约束度为正值的 $SOC(\Delta_j^+)$,会使机构自由度增加 Δ_j^+ ;为确定其运动,需在约束度为正值的 $SOC(\Delta_j^+)$ 上设定 Δ_j^+ 个虚拟变量 ($\Delta_j^+ = k$);

2) 约束度为 0 的 $SOC(\Delta_j^0)$,不影响机构自由度,其运动具有确定性,即其位置正解能独立求解;

3) 约束度为负值的 $SOC(\Delta_j^-)$,使机构自由度减少 $|\Delta_j^-|$,即对机构施加了 $|\Delta_j^-|$ 个约束方程 ($|\Delta_j^-| = k$);

4) 因 $SOC(\Delta_j^+)$ 中的虚拟变量数目 Δ_j^+ ,恰等于约束方程数目 $|\Delta_j^-|$,因此,易建立含 Δ_j^+ 个变量的

位置方程;

5)用非线性高次方程的一般求解方法(例:迭代法、二分法等)或直接应用符号计算软件求解。

2.2 位置正解

机构运动学求解模型如图2所示,以等边三角形静平台0的几何中心O为原点,建立直角静坐标系,转动副 R_{11}, R_{21}, R_{31} (见图1)位于等边三角形的半径为 a 的内切圆的切点上, X 轴垂直于 R_{21} 的轴线,其中,图2(b)为图2(a)的平面展开图。

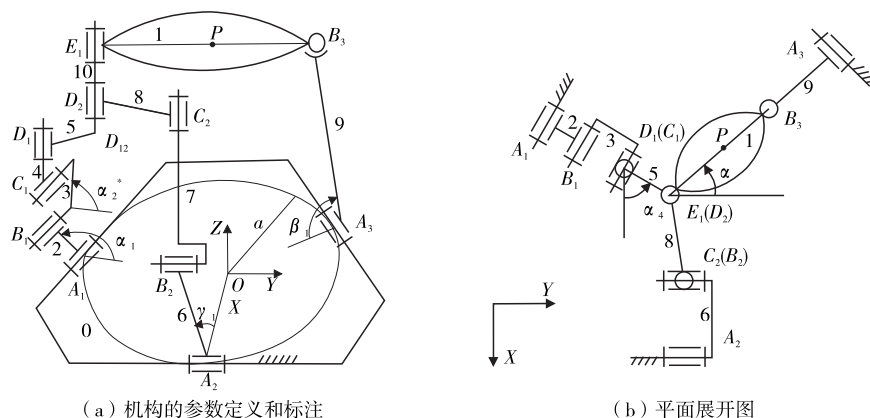


图2 机构运动学分析模型

Fig.2 Kinematic analysis model of the mechanism

机构构件尺寸参数为:混合支链的左侧,各运动副之间的距离为 $A_1B_1=l_2$, $B_1C_1=l_3$, $C_1D_1=l_4$; $A_2B_2=l_6$, $B_2C_2=l_7$, $C_2D_2=l_8$ 。其他尺寸为: $D_1D_{12}=l_5$, $D_{12}D_2=h_5$;构件 $D_2E_1=l_{10}$, $A_3B_3=l_9$, $E_1B_3=l_1$ 。

2.2.1 第1单开链中运动副位置的求解

在 SOC_1 中,取驱动副 R_{11} 的转角为 α_1 ,并设转动副 R_{12} 的转角为虚拟变量 α_2 ;转动副 R_{21}, R_{31} 的转角分别为 γ_1, β_1 ;运动副 R_{14} 与 X 轴间的转角为 α_4 ,如图2所示。

静平台0上 A_1, A_2 和 A_3 的坐标分别为 $(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)$; $(a, 0, 0)$; $(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)$ 。

在支链I中,点 D_1, D_2 的坐标分别为:

$$\begin{bmatrix} x_{D_1} \\ y_{D_1} \\ z_{D_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_2)/2 \\ \sqrt{3}(-a + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_2)/2 \\ l_2 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_2 + l_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{D_2} \\ y_{D_2} \\ z_{D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_2)/2 + l_5 \sin \alpha_4 \\ \sqrt{3}(-a + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_2)/2 + l_5 \cos \alpha_4 \\ l_2 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_2 + l_4 + h_5 \end{bmatrix}$$

在支链II中, C_2 的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_{C_2} \\ y_{C_2} \\ z_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - l_6 \cos \gamma_1 \\ 0 \\ l_6 \sin \gamma_1 + l_7 \end{bmatrix}$$

因杆件 8 始终平行于 XOY 平面,由 $z_{C_2} = z_{D_2}$ 得

$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{l_2 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_2 + l_4 + h_5 - l_7}{l_6}\right) \text{ 或 } \gamma_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{l_2 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_2 + l_4 + h_5 - l_7}{l_6}\right) \quad (9)$$

同时,由杆长约束 $C_2 D_2 = l_8$,得位置约束方程,并化简得

$$(L - K) \tan^2 \frac{\alpha_4}{2} + 2M \tan \frac{\alpha_4}{2} + (L + K) = 0$$

式中: $F = (-a + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_2)/2 - a + l_6 \cos \gamma_1$; $G = \sqrt{3}(-a + l_2 \cos \alpha_1 + l_3 \cos \alpha_2)/2$; $H = l_5$; $I = l_8$; $L = F^2 + G^2 + H^2 - I^2$; $K = 2GH$; $M = 2FG$ 。

解得

$$\alpha_4 = 2 \arctan\left(\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - L^2 + K^2}}{L - K}\right) \quad (10)$$

2.2.2 第 2 单开链中运动副位置的求解

因转动副 R_{24} , R_{15} 同轴线,有

$$[z_{E_1}] = [z_{D_2} + l_{10}]$$

在简单支链 $R_{15} S_{32}$ 中, B_3 的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_{B_3} \\ y_{B_3} \\ z_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a + l_9 \cos \beta_1)/2 \\ \sqrt{3}(a - l_9 \cos \beta_1)/2 \\ l_9 \sin \beta_1 \end{bmatrix}$$

由 $z_{E_1} = z_{B_3}$ 可得

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{l_2 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_2 + l_4 + l_{10} + h_5}{l_9}\right) \text{ 或 } \beta_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{l_2 \sin \alpha_1 + l_3 \sin \alpha_2 + l_4 + l_{10} + h_5}{l_9}\right) \quad (11)$$

动平台与 Y 轴正向的转角为 α ,则

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_{E_1} - x_{B_3}}{y_{B_3} - y_{E_1}}\right)$$

至此,求得的各运动副在静坐标系中的位置,均为仅含有 α_2 的函数。由杆长约束 $B_3 E_1 = l_1$ 得

$$(x_{E_1} - x_{B_3})^2 + (y_{E_1} - y_{B_3})^2 = l_1^2 \quad (12)$$

对式(12)运用一维搜索的方法,求解出虚拟输入变量 α_2 ,代入上述机构位置正解过程,即得动平台上 P 点坐标及其转角为

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ \alpha_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{E_1} + x_{B_3})/2 \\ (y_{E_1} + y_{B_3})/2 \\ z_{E_1} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

2.3 位置反解

由动平台 P 点坐标 (x_P, y_P, z_P) 及其转角 α_P ,计算得 D_2 的坐标为

$$\begin{bmatrix} x'_{D_2} \\ y'_{D_2} \\ z'_{D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P + l_1 \sin \alpha / 2 \\ y_P - l_1 \cos \alpha / 2 \\ z_P - l_{10} \end{bmatrix}$$

因 $y_{D_1} = \sqrt{3}x_{D_1}$, 将 D_1 的坐标设为 $(x'_{D_1}, \sqrt{3}x'_{D_1}, z'_{D_2} - h_5)$; 又因 D_{12} 的坐标为 $(x'_{D_2}, y'_{D_2}, z'_{D_2} - h_5)$, 由杆长约束 $D_1 D_{12} = l_5$, 得

$$(x'_{D_1} - x'_{D_2})^2 + (\sqrt{3}x'_{D_1} - y'_{D_2})^2 = l_5^2$$

解得

$$x'_{D_1} = \frac{x'_{D_2} + \sqrt{3}y'_{D_2} \pm \sqrt{4l_5^2 - 3x'^2_{D_2} + 2\sqrt{3}x'_{D_2}y'_{D_2} - y'^2_{D_2}}}{4}$$

因 D_1 与 C_1 同轴, 得到 C_1 坐标

$$(x'_{D_1}, \sqrt{3}x'_{D_1}, z'_{D_2} - h_5 - l_4)$$

已知 B_1 坐标

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ z_{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a + l_2 \cos \alpha_1) / 2 \\ \sqrt{3}(-a + l_2 \cos \alpha_1) / 2 \\ l_2 \sin \alpha_1 \end{bmatrix}$$

因此, 由杆长约束 $B_1 C_1 = l_3$, 并化简得

$$Q \tan^2 \frac{\alpha_1}{2} + R \tan \frac{\alpha_1}{2} + S = 0$$

式中: $N = x'_{D_1} + a/2$; $P = 4N^2 + (z'_{D_2} - h_5 - l_4)^2 + l_2^2 - l_3^2$; $Q = P + 4Nl_2$; $R = -4l_2(z'_{D_2} - h_5 - l_4)$; $S = P - 4Nl_2$ 。

解得

$$\alpha_1 = 2 \arctan \left(\frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4QS}}{2Q} \right) \quad (13)$$

可知, α_1 存在两组解。

3 机构速度与加速度分析

3.1 建立雅可比矩阵

由 $z_{B_3} = z_P$, $z_{C_2} = z_{D_2} = z_P - l_{10}$ 得

$$\begin{cases} \beta'_1 = \arcsin\left(\frac{z}{l_9}\right) \\ \gamma'_1 = \arcsin\left(\frac{z - l_{10} - l_7}{l_6}\right) \end{cases}$$

再由杆长约束条件 $B_3 E_1 = l_1$, $D_1 D_{12} = l_5$, $C_2 D_2 = l_8$, 得

$$\begin{cases} (x'_{D_2} - x_{D_1})^2 + (y'_{D_2} - y_{D_1})^2 = l_8^2 \\ (x'_{D_2} - x_{C_1})^2 + (y'_{D_2} - y_{C_1})^2 = l_5^2 \\ x_P - l_1 \sin \alpha_P / 2 = x_{B_3} \\ y_P + l_1 \cos \alpha_P / 2 = y_{B_3} \end{cases}$$

将上述方程组对时间求导,并简化为

$$\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (14)$$

式中: $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x}_P \quad \dot{y}_P \quad \dot{z}_P \quad \dot{\alpha}_P]^T$; $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\alpha}_1$ 。

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 2V_{11} & 2V_{12} & W_{11} & W_{12} \\ 2V_{21} & 2V_{22} & 2W_{21} & W_{22} \\ 1 & 0 & -V_{33}/2 & -V_{31}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}V_{33}/2 & -V_{32}/2 \end{bmatrix}; \mathbf{J}_2 = [-W_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

而

$$U_{a_2} = \frac{z - l_{10} - l_2 \sin \alpha_1 - h_5 - l_4}{l_3}; U_{\gamma_1} = \frac{z - l_{10} - l_7}{l_6}; U_{\beta_1} = \frac{z}{l_9}; V_{11} = x'_{D_2} - x_{D_1}; V_{12} = y'_{D_2} - y_{D_1};$$

$$V_{13} = -\frac{U_{a_2}}{\sqrt{1-U_{a_2}^2}}; V_{21} = x'_{D_2} - x_{C_2}; V_{22} = y'_{D_2} - y_{C_2}; V_{23} = \frac{U_{\gamma_1}}{\sqrt{1-U_{\gamma_1}^2}}; V_{31} = l_1 \cos \alpha_P; V_{32} = l_1 \sin \alpha_P;$$

$$V_{33} = \frac{U_{\beta_1}}{\sqrt{1-U_{\beta_1}^2}}; W_{11} = -V_{13}(V_{11} + \sqrt{3}V_{12}); W_{12} = l_1(V_{11} \cos \alpha_P + V_{12} \sin \alpha_P); W_{13} = l_2(V_{11} +$$

$$\sqrt{3}V_{12})(\sin \alpha_1 + V_{13} \cos \alpha_1); W_{21} = V_{21}V_{23}; W_{22} = l_1(V_{21} \cos \alpha_P + V_{22} \sin \alpha_P)。$$

当矩阵 \mathbf{J}_1 不为奇异时,记 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2$,则有

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (15)$$

3.2 动平台加速度分析

将式(14)两边对时间求导,得到

$$\dot{\mathbf{J}}_1 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_1 \ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}_2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{J}_2 \ddot{\boldsymbol{\alpha}}$$

化简为

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_1^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_v + \mathbf{J}_2 \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (16)$$

$$\text{式中: } \mathbf{J}_v = \dot{\mathbf{J}}_2 \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\mathbf{J}}_1 \dot{\mathbf{X}}; \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 2\dot{V}_{11} & 2\dot{V}_{12} & \dot{W}_{11} & \dot{W}_{12} \\ 2\dot{V}_{21} & 2\dot{V}_{22} & 2\dot{W}_{21} & \dot{W}_{22} \\ 1 & 0 & -\dot{V}_{33}/2 & -\dot{V}_{31}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}\dot{V}_{33}/2 & -\dot{V}_{32}/2 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{J}}_2 = [-\dot{W}_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T。$$

4 算例验证

4.1 位置正反解的验证

设计机构的尺寸参数为 $a = 200^\circ, l_1 = 400, l_2 = 20, l_3 = l_5 = l_6 = 160, l_4 = 115, h_5 = 18, l_7 = 90, l_8 = 180, l_9 = 315, l_{10} = 69.5$, 单位为 mm。当输入角 $\alpha_1 = 120^\circ$ 时,求得机构位置正解见表 1。

将表 1 中 No.4 组解代入式(13),得到两组实

表 1 机构位置正解

Table 1 Direct position solutions

No.	x/mm	y/mm	z/mm	$\alpha/(^\circ)$
1	-8.957	9.894	314.731	29.195
2	-184.641	243.113	98.657	18.946
3	-3.702	43.541	312.614	35.326
4	-24.114	143.816	286.929	44.781

数解为 $\alpha_1 = 120.001^\circ$ 和 56.052° , 其中一解与给定输入角 $\alpha_1 = 120^\circ$ 一致, 因此, 位置正解计算正确。

4.2 速度、加速度的验证

取上述相同尺寸参数, 预设电机的转动频率为 0.1 Hz, 由式(15)可得动平台 1 的速度分量, 见表 2; 同时, 利用 CAD 模型由运动仿真, 得到如图 3 所示的速度曲线图。

如图 3, 在仿真曲线上, 当 $t = 8\text{ s}$ 时, 得到动平台速度分量 $V_{x_p} = 1.249\text{ mm/s}$, $V_{y_p} = 14.301\text{ mm/s}$, $V_{z_p} = -4.621\text{ mm/s}$, 角速度分量为 $V_{a_p} = 2.462\text{ (}^\circ\text{)/s}$, 这与表 2 中 $t = 8\text{ s}$ 的计算结果一致。

同样, 由式(16)计算得动平台加速度, 见表 3; 由仿真得动平台的加速度曲线, 如图 4 所示。

表 2 动平台速度

Table 2 Calculation of the speed

t/s	$V_{x_p}/$ (mm/s)	$V_{y_p}/$ (mm/s)	$V_{z_p}/$ (mm/s)	$V_{a_p}/$ ($^\circ$)/s)
0	-0.301	-1.885	0.553	-0.380
2	-0.826	-12.518	3.963	-2.172
4	0.953	-13.759	4.254	-1.853
6	-1.356	15.273	-4.647	1.974
8	1.221	14.198	-4.450	2.548

表 3 动平台加速度

Table 3 Calculation of the acceleration

t/s	$A_{x_p}/$ (mm/s ²)	$A_{y_p}/$ (mm/s ²)	$A_{z_p}/$ (mm/s ²)	$A_{a_p}/$ ($^\circ$)/s ²)
0	-1.124	-7.205	2.121	-1.446
2	0.622	-3.217	1.127	-0.311
4	0.611	3.398	-1.244	0.693
6	-0.174	13.643	-4.431	2.050
8	0.458	-7.720	2.626	-1.051

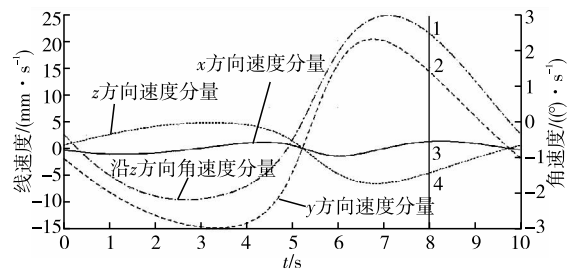


图 3 速度仿真曲线
Fig.3 Simulation curve of the speed

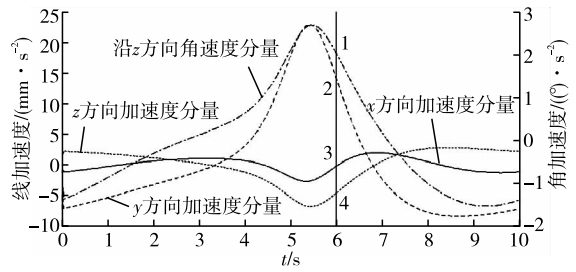


图 4 加速度仿真曲线
Fig.4 Simulation curve of the acceleration

如图 4, 在仿真曲线上当 $t = 6\text{ s}$ 时, 得动平台加速度分量 $A_{x_p} = -0.224\text{ mm/s}^2$, $A_{y_p} = 14.071\text{ mm/s}^2$, $A_{z_p} = -4.635\text{ mm/s}^2$, 角加速度分量为 $A_{a_p} = 2.019\text{ (}^\circ\text{)/s}^2$, 这与表 3 中 $t = 6\text{ s}$ 的计算结果一致。因此, 速度、加速度计算正确。

5 机构的虚拟样机设计

该机构可用于三平移—转动振动筛分装置的主机构, 其虚拟样机设计, 如图 5 所示。

该多维振动筛主要由静平台支座 0、筛箱 1、混合支链 2、简单支链 3 和驱动电机 4 组成。在混合支链 2 中, 杆件采用分体式设计, 由杆件主体 I 和关节 II (转动轴承副) 组成, 如图 6(a) 所示。在保证装置结构刚度和强度的基础上, 为减轻构件质量, 杆件主体 II 采用铝合金材质, 对于关节 II, 使用非标杆端关节轴承套圈和小尺寸轴承的组合, 并用端盖密封; 而在简单支链 3 上, 可使用标准内螺纹杆端

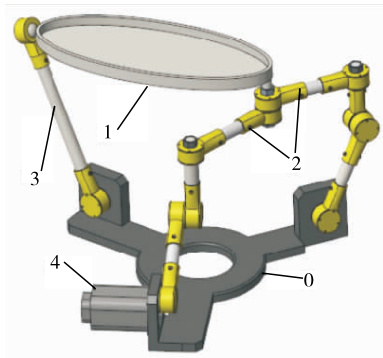


图 5 CAD 模型
Fig.5 CAD model

关节轴承作为球副关节,如图 6(b)所示。

静平台 0 为一整体结构,整体式设计可保证各电机轴线垂直的位置精度。根据已有设计经验,驱动电机选择型号为 Y2-7124 的三相异步电机即可满足一般的筛分作业。

6 结 论

提出了一种新型 3T1R(Fi-Mo)机构,该机构耦合度低($\kappa=1$),所以其运动学求解较为简单。又因该机构结构简单,其单输入多输出的特性,适合于需要复杂空间运动的筛分作业。基于序单开链建模原理,给出了机构的运动位置的正解求解方法;利用机构的杆长约束,得到了机构的雅可比矩阵,以及机构输出速度和加速度计算公式;设计了用于三平移—转动振动筛分的虚拟样机。以上工作为该 3T1R 并联振动筛的尺寸优化、机械结构设计及制造、动力学分析奠定了基础。

参考文献:

- [1]李树军,张艳丽,吴宇峰,等. 空间凸轮驱动的单自由度 PRS 型并联机构及其设计[J]. 中国机械工程, 2005, 16(22): 2002-2005.
- [2]SANCISI N, PARENTI-CASTELLI V. A 1-Dof parallel spherical wrist for the modelling of the knee passive motion[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010(45): 658-665.
- [3]FRANCI R, PARENTI-CASTELLI V, BELVEDERE C, et al. A new one-DOF fully parallel mechanism for modelling passive motion at the human tibiotalar joint[J]. Journal of Biomech-Anics, 2009(42): 1403-1408.
- [4]沈惠平,张会芳,张江涛,等. 并联运动振动筛的筛分运动规律及其轨迹的研究[J]. 机械设计, 2008(12): 20-23.
- [5]王新翔. 非平面筛面并联振动筛的筛分实验研究[D]. 常州: 常州大学, 2012.
- [6]SHEN H, XUE C Y, ZHANG J T, et al. A novel PKM-based vibrating sifter and its screening efficiency experimental study[C]//13th World Congress in Mechanism and Machine Science. México: IFToMM, 2011.
- [7]沈惠平,邓嘉鸣,李菊,等. 少维输入-多维期望运动输出并联机构及其应用[J]. 机械设计与制造工程, 2013(6): 1-4.
- [8]SHEN H P, ZHU X R, ZHANG D, et al. The design methodology for less input-more output parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016(104): 43-58.
- [9]沈惠平,朱帅帅. 一种两输入三转动输出并联机构: 201310394921.6[P]. 2013-08-28.
- [10]沈惠平,黄涛,邓嘉鸣,等. 一种单输入三平移三转动输出并联装置: 201310415851.8[P]. 2013-09-10.
- [11]沈惠平,黄涛,邓嘉鸣,等. 一种单输入三平移三转动输出并联机构: 201310416490.9[P]. 2013-09-10.
- [12]沈惠平,黄涛,邓嘉鸣,等. 一种单输入四维运动输出并联机构: 201310276474.4[P]. 2013-09-25.
- [13]沈惠平,余同柱,黄涛,等. 一种单自由度三维运动机构: 201210307595.6[P]. 2012-12-05.
- [14]沈惠平,余同柱,尹洪波,等. 一种单自由度三维运动装置: 201210307592.2[P]. 2012-11-21.
- [15]沈惠平,杨梁杰,邓嘉鸣,等. 用于肩关节康复训练的单输入三转动输出并联机构及其运动学设计[J]. 中国机械工程, 2015(22): 2983-2988.
- [16]邓嘉鸣,戴丽芳,沈惠平,等. 并联式脚底按摩机构的设计及其研制[J]. 机械设计, 2016(2): 78-82.
- [17]李菊,曾氢菲,邓嘉鸣,等. 多维并联振动筛筛分过程解析与筛面运动形式优选[J]. 农业机械学报, 2016(11): 399-407.
- [18]艾青林,祖顺江,胥芳. 并联机构运动学与奇异性研究进展[J]. 浙江大学学报(工学版), 2012(46): 1345-1349.
- [19]沈惠平,孟庆梅,杨廷力,等. 一种单输入三平移—转动并联机器人操作手: 20161014827.3[P]. 2016-03-16.
- [20]杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.

(责任编辑:李艳,谭晓荷)