

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2020.04.007

# 一种零耦合度新型球面并联机构的设计、 拓扑分析与运动学

沈惠平, 徐 清, 王一熙, 李家宇, 杨廷力

(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164)

**摘要:**基于方位特征方程(POC)的并联机构拓扑结构设计理论,设计了一种结构简单、零耦合度、能实现三转动(3R)的新型球面并联机构。首先,分析计算了该机构的方位特征集(POC)、自由度(DOF)以及耦合度( $k$ )等拓扑特性,发现该机构包含 3 个零耦合度的基本运动链(BKC),因此,易求得机构位置正、反解的解析解;然后,根据位置反解公式,计算分析了机构的工作空间;并基于雅可比矩阵,对机构的奇异位形进行了分析。该机构可用作机器人的肩、腕和腰等关节,或用作姿态调整装置。

**关键词:**球面机构;耦合度;运动学;工作空间;奇异性

中图分类号:TK 8

文献标志码:A

文章编号:2095-0411(2020)04-0046-09

## Design and Topological Analysis as Well as Kinematics of a New Spherical Parallel Mechanism with Zero Coupling Degree

SHEN Huiping, XU Qing, WANG Yixi, LI Jiayu, YANG Tingli

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** According to the topological design theory of parallel mechanism(PM) based on position and orientation characteristic (POC) equations, a new three-rotational spherical PM with zero coupling degree is designed. Firstly, the POC, degree of freedom and coupling degree of the PM are calculated. It is found that the PM contains three BKC with zero coupling degree. Therefore, the analytical formula of the positive and inverse solution of the PM is directly derived; Then, the workspace of the PM is calculated and analyzed based on the position inverse solution formula and the singular configuration of the PM is analyzed based on the Jacobian matrix. This mechanism can be used as a joint for the shoulder, wrist and waist of a robot, or as an adjustment device of position and orientation.

**收稿日期:**2020-01-01。

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(51475050)。

**作者简介:**沈惠平(1965—),男,江苏吴江人,博士,教授。E-mail: shp65@126.com

**引用本文:**沈惠平,徐清,王一熙,等.一种零耦合度新型球面并联机构的设计、拓扑分析与运动学[J].常州大学学报(自然科学版),2020,32(4):46-54.

**Key words:** spherical mechanism; coupling degree; kinematics; workspace; singularity

三自由度球面并联机构可用作机器人的肩、腕和腰等关节,或用作定位装置。根据拓扑结构,球面并联机构可大致分为3大类,即3-RRR型、S+3-SPS型以及其他型式。

对于3-RRR型球面并联机构,GOSSELIN等<sup>[1-2]</sup>提出三驱动副轴线共面的3-RRR球面并联机构,分析得到关于欧拉角的一元四次多项式,并求得8组解;何开明<sup>[3]</sup>用球面三角学的方法对3-RRR球面机构的位姿正解问题进行研究;赖一楠等<sup>[4]</sup>根据3-RRR球面机构的特点,提出面向控制的高效迭代算法;杨加伦等<sup>[5]</sup>利用机构的雅可比矩阵以及牛顿迭代法,快速求得1组3-RRR球面机构的运动学正解;鲁开讲等<sup>[6]</sup>基于四元数法推导出3-RRR球面机构的位姿正解方程,并用同伦算法,得到正解方程的全部8组解。对于S+3-SPS型球面并联机构,杨廷力等<sup>[7]</sup>根据基于方位特征集的并联机构拓扑结构设计方法,得出2种S+3-SPS球面并联机构;向中凡等<sup>[8]</sup>提出一种变形并联机构S+3-PSS;GALLARDO<sup>[9]</sup>等提出一系列具有2条支链和1个从动球铰结构的三自由度球面并联结构,可看作由S+3-SPS球面并联机构衍化而来;于海波等<sup>[10]</sup>对空间S+3-SPS对顶双锥机构进行分析,获得完全封闭形式的位置正反解;崔国华等<sup>[11-12]</sup>采用可操作度指标对S+3-SPS并联机构的运动特性进行分析研究。许多学者采用数值法和解析法对机构的位置正解进行研究,但均未考虑机构拓扑结构特性与运动学求解难易程度之间的关系。作者基于机构拓扑结构特性的运动学求解方法<sup>[13]</sup>,建立机构拓扑结构复杂性和位置正解求解难易性的关系,提出按机构耦合度大小来分类求解并联机构位置正解全部实数解的数值法,对 $\kappa=0$ 的机构,易直接求解其解析正解。该方法可使机构位置正解问题求解思路清晰、容易。

本文设计了一种包含3个零耦合度基本运动链(BKC)的球面并联机构,它与3-RRR机构相比,不需要满足9个转动副轴线必须相交于一点的装配要求,因此,具有结构简单,制造、装配容易的优点。与S+3-SPS机构相比,省去了3个球副,制造方便。因该机构耦合度为0,因此,比耦合度为1的已有球面机构的运动学分析、误差分析及动力学分析要容易得多。

## 1 球面机构的设计及其拓扑分析

### 1.1 机构设计

本文提出的3R球面并联机构如图1所示,它由静平台0,动平台1以及3条支链组成,其中,第I条为混合支链,它包含1个2-dof的平面5杆机构( $R_1-P_2-R_3-P_3-R_2$ ),并通过复合运动副 $R_3$ 连接连杆2,连杆2通过球副 $S_3$ 与动平台1铰接,2个转动副 $R_1$ , $R_2$ 与静平台0连接;第II条支链为 $S_1-P_1-S_2$ ,其两端分别通过球副 $S_2$ , $S_1$ 与静平台0、动平台1铰接;

第III条支链仅为1个球副(S),它直接连接静平台0和动平台1。其中, $P_1$ , $P_2$ , $P_3$ 为驱动副。

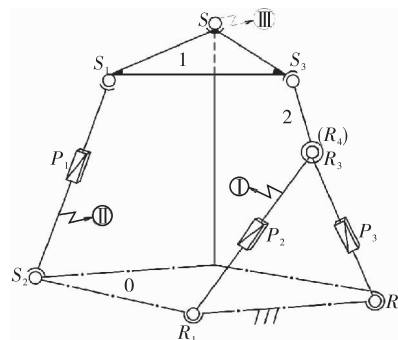


图1 一种零耦合度的球面并联机构

Fig.1 A new spherical parallel mechanism with zero coupling degree

### 1.2 机构的 POC 集分析

#### 1.2.1 串联、并联机构的 POC 集方程

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中:  $M_{J_i}$  为第  $i$  个运动副的 POC 集;  $M_{b_i}$  为第  $i$  个支链末端的 POC 集;  $M_{p_a}$  为机构动平台的 POC 集<sup>[7]</sup>。

### 1.2.2 机构的 POC 集分析

支路拓扑结构分别记为: 第 I 条混合支链的拓扑结构等效为  $b_1\{-\diamond(P^{(3R-2P)}, P^{(3R-2P)}) \perp R_3-S_3-\}$ ; 其余 2 条支链的拓扑结构分别为  $b_2\{-S_1-P_1-S_2-\}$ ;  $b_3\{-S-\}$ 。选定动平台 1 上的  $S$  点为基点。确定支链末端构件的 POC 集, 由式(1)得

$$\begin{cases} M_{b_1} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_1) \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_3) \\ r^1(\parallel R_3) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \\ M_{b_2} = \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_{12}) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp \rho) \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \\ M_{b_3} = \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

动平台的 POC 集, 由式(2)得

$$M_{p_a} = M_{b_1} \cap M_{b_2} \cap M_{b_3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

可知, 该机构动平台 1 只产生三维转动。

## 1.3 机构的自由度计算

自由度计算公式<sup>[7]</sup>为:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (3)$$

$$\xi_{L_j} = \dim. \{ (\bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \cup M_{b_{(j+1)}}) \} \quad (4)$$

式中:  $F$  为机构自由度;  $f_i$  为第  $i$  个运动副自由度;  $m$  为运动副数;  $v$  为独立回路数 ( $v = m - n + 1$ ,  $n$  为构件数);  $\xi_{L_j}$  为第  $j$  个独立回路的独立位移方程数;  $M_{b_{(j+1)}}$  为前  $j+1$  条支链末端构件的 POC 集;  $\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$  为前  $j$  条支链组成的子并联机构 POC 集。

### 1.3.1 确定独立位移方程数

该机构可分解为 3 个独立回路, 其独立位移方程数计算步骤为: 第一个独立回路为第 I 条混合支链中的平面五杆机构, 显然, 其独立方程数  $\xi_{L_1} = 3$ ; 第二个回路由  $R_4-S_3-S$  组成, 其独立位移方程数  $\xi_{L_2}$ , 显然为  $\xi_{L_2} = 6$ ; 同样, 第三个回路为  $S_2-P_1-S_2-R^{(S-S_3)}$ , 其独立位移方程数  $\xi_{L_3}$  显然也为  $\xi_{L_3} = 6$ 。

### 1.3.2 确定机构自由度

由式(3)得

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = (5 + 6 + 7) - (3 + 6 + 6) = 3$$

因此, 当  $P_1, P_2, P_3$  为驱动副时, 动平台 1 可实现绕球副  $S$  的三维转动。

## 1.4 机构的耦合度计算

### 1.4.1 支链的约束度和 BKC 的耦合度 $k$

由基于序单开链的机构组成原理可知<sup>[7]</sup>, 一个机构可以分解为若干个基本运动链(BKC), BKC 指自由度为零且其任一子运动链的自由度大于零的最小运动链, 一个 BKC 又可分解为若干个单开链, 连接在运动链上的第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $m_j$  为第  $j$  个 SOC $_j$  的运动副数;  $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度;  $I_j$  为第  $j$  个 SOC $_j$  的驱动副数;  $\xi_{L_j}$  为第  $j$  个独立回路的独立位移方程数。

对一个 BKC 而言, 须满足

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0 \quad (6)$$

则 BKC 的耦合度  $k$  为

$$k = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (7)$$

式中:  $\min\{\cdot\}$  表示 BKC 分解为  $v$  个 SOC( $\Delta_j$ ), 可有多种分解方案, 取  $\sum_{j=1}^v |\Delta_j|$  为最小者。

#### 1.4.2 本机构的耦合度 $k$ 计算

已求得 3 个回路的独立位移方程数, 即  $\xi_{L_1} = 3, \xi_{L_2} = \xi_{L_3} = 6$ 。因此, 由式(5)得, 它们的约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 5 - 2 - 3 = 0; \Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 6 - 0 - 6 = 0; \Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L_3} = 7 - 1 - 6 = 0。$$

因此, 由式(7)得

$$k = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} = \frac{1}{2} (0 + 0 + 0) = 0$$

这样, 该机构包含 3 个基本运动链(BKC), 即 BKC $_1$ , BKC $_2$ , BKC $_3$ , 其耦合度  $k_1, k_2, k_3$  均为 0, 因此, 按上述 BKC 可依次直接推导出解析解, 而不必进行复杂的数学推导、消元计算。

## 2 机构的位置分析

### 2.1 坐标系的建立及参数标注

机构的运动学建模如图 2 所示, 设静平台 0 为边长为  $a$  的正方形, 选取静平台 0 上的  $O$  点作为静坐标系的原点,  $x$  轴沿  $OE$  方向,  $y$  轴沿  $OG$  方向,  $z$  轴沿  $OO'$  方向; 设动平台 1 为直角边长为  $b$  的等腰直角三角形, 动坐标系的原点为动平台 1 上的  $O'$  点,  $x'$  轴沿  $O'A$  方向,  $y'$  轴沿  $O'C$  方向,  $z'$  轴由右手螺旋法则确定。设 3 个主动输入分别为  $DG = l_1, DF = l_2, AE = l_3, OO' = l, CD = d$ ,  $DC$  与  $DH$  之间的夹角为  $\theta$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示为绕  $x, y, z$  轴的旋转角。

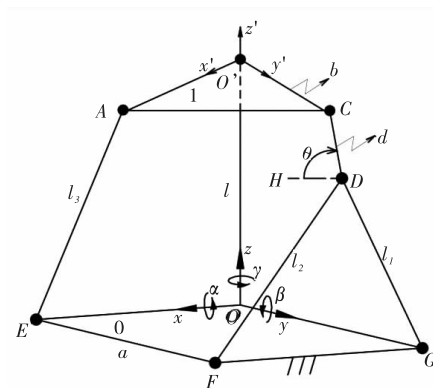


图 2 机构的运动学模型

Fig.2 Kinematic model of the mechanism

### 2.2 位置正解分析

机构位置正解为: 已知 3 个主动副输入长度  $l_1, l_2, l_3$ , 求解动平台的姿态角  $(\alpha, \beta, \gamma)$ 。易知, 静平台 0 上  $E, F, G$  及  $O'$  的坐标分别为:  $E(a, 0, 0), F(a, a, 0), G(0, a, 0), O'(0, 0, l)$ 。

### 2.2.1 由 BKC<sub>1</sub> 求 D 点的坐标

在第一回路 F-D-G(即 BKC<sub>1</sub>)中,易知,D 点的坐标为

$$(a - (l_2^2 - l_1^2 + a^2)/2a, a, \sqrt{l_2^2 - ((l_2^2 - l_1^2 + a^2)/2a)^2})$$

### 2.2.2 由 BKC<sub>2</sub> 求 C 点的坐标

在第二回路 D-C-O'(即 BKC<sub>2</sub>)中,易知,C 点坐标为

$$(X_D + d \cos \theta, a, Z_D + d \sin \theta)$$

由几何约束  $O'C = b$ ,得

$$C_2 \sin \theta + C_1 \cos \theta + C_3 = 0 \quad (8)$$

解得

$$\theta = 2 \arctan(-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 + C_1^2 - C_3^2}) / (C_3 - C_1) \quad (9)$$

式中:  $C_1 = 2dX_D$ ;  $C_2 = 2d(Z_D - l)$ ;  $C_3 = a^2 - b^2 + d^2 + (Z_D - l)^2 + X_D^2$ 。

因此,C 点的坐标由  $\theta$  值即可求得。

### 2.2.3 由 BKC<sub>3</sub> 求 V 点的坐标

在第三回路 E-A-O'C(即 BKC<sub>3</sub>)中,由几何约束条件  $AE = l_3$ ,  $AO' = b$ ,  $AC = \sqrt{2}b$ ,易求出 A 点的坐标为

$$\left[ \frac{l}{a} Z_A + t_0, \frac{am_0 + 2(al - aZ_C - lX_C)Z_A}{2a^2}, Z_A \right]^T$$

式中:  $m_0 = X_C^2 + a^2 + Z_C^2 - b^2 - l^2 + ((a^2 + b^2 - l_3^2 - l^2)/a)X_C$ ;  $t_0 = (a^2 + b^2 - l_3^2 - l^2)/2a$ ;  $a_1 = [l^2 + (l - Z_C - lX_C/a)^2]/a^2 + 1$ ;  $b_1 = 2lt_0/a + m_0(l - Z_C - lZ_C/a)/a^2 - 2l$ ;  $c_1 = t_0^2 + l^2 - b^2 + m_0^2/4a^2$ ;  $Z_A = (-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1})/2a_1$ 。

### 2.2.4 由变换矩阵求解动平台的姿态角

已知  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示为绕  $x, y, z$  轴的旋转角,则动、静坐标系之间的变换矩阵  $Q$  可写成

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

则动平台 1 上一点 S 在静坐标系下的坐标可表示为

$$S = QS' + O' \quad (10)$$

式中:  $S'$  为 S 在动坐标系下的坐标;  $O'$  为动坐标系原点在静坐标系下的坐标。

于是,动平台上 A, C 点在静坐标系中的坐标分别为:

$$\begin{aligned} & [b \cos \beta \cos \gamma, b(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma), b(\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + l]^T \\ & [-b \cos \beta \sin \gamma, b(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma), b(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + l]^T \end{aligned}$$

由 A, C, D 点的坐标及式(8)~式(9),可求得

$$\begin{cases} \alpha = 2 \arctan((-C_{22} \pm \sqrt{C_{22}^2 + C_{11}^2 - C_{33}^2}) / (C_{33} - C_{11})) \\ \beta = \arccos(-X_C / b \sin \gamma) \\ \gamma = \arctan(-X_C / X_A) \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $C_{11} = b \sin \gamma$ ;  $C_{22} = b \sin \beta \cos \gamma$ ;  $C_{33} = -Y_A$ 。

至此,动平台1的姿态角 $(\alpha, \beta, \gamma)$ 已全部求出。

### 2.3 位置逆解分析

已知动平台转角 $\alpha, \beta, \gamma$ ,求3个输入副的长度 $l_1, l_2, l_3$ 。由2.2求出C点坐标,再求D点坐标为

$$(X_C - d \cos \theta, a, Z_C - d \sin \theta)$$

再由几何约束 $DG = l_1, DF = l_2, AE = l_3$ ,分别求得

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{(X_C - d \cos \theta)^2 + (Z_C - d \sin \theta)^2} \\ l_2 = \sqrt{(X_C - d \cos \theta - a)^2 + (Z_C - d \sin \theta)^2} \\ l_3 = \sqrt{(X_A - a)^2 + Y_A^2 + Z_A^2} \end{cases} \quad (12)$$

## 3 实例验算

### 3.1 正解算例

设并联机构的结构参数为: $a = 40 \text{ mm}, b = 62 \text{ mm}, l = 80 \text{ mm}, d = 30 \text{ mm}$ ,3个移动副的输入长度为 $l_1 = 40 \text{ mm}, l_2 = 40 \text{ mm}, l_3 = 70 \text{ mm}$ 。由D,C点坐标及式(8)~式(11)求得4组实数解,见表1。

### 3.2 逆解算例

将表1中第1组的正解数据代入式(12),求得 $l_1' = 39.998 \text{ mm}, l_2' = 39.994 \text{ mm}, l_3' = 69.998 \text{ mm}$ ,这与求解正解时给定的3个主动副输入长度一致,其最大相对误差为0.015%,用另外3组正解的数据,同样可验证。因此,正解、逆解公式推导正确。

表1 位置正解数值

Table 1 Positive solution of the mechanism ( $^{\circ}$ )

组别	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	-113.117	79.700	64.300
2	-50.467	7.863	9.356
3	-76.280	140.95	58.211
4	9.398	36.301	-54.995

## 4 奇异位置分析

当机构处于奇异位置时,其运动不具有不确定性。因此,在并联机构的设计时,有必要对其可能存在的奇异位置进行分析。对机构位置逆解公式(12)两边求导,得出雅可比矩阵,进一步分析矩阵来得到该并联机构可能存在的奇异位置。

### 4.1 雅可比矩阵求解

设该机构动平台的输出角速度为 $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$ ,主动输入速度为 $\boldsymbol{V} = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3]^T$ ,将式(12)两边同时对时间 $t$ 求导,可得

$$\boldsymbol{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J}_q \cdot \boldsymbol{V} \quad (13)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{J}_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_q = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}; f_{11} = b(Z_C - d \sin \theta)(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma);$$

$$f_{12} = b[(X_C - d \cos \theta) \sin \beta + (Z_C - d \sin \theta) \cos \alpha \cos \beta] \sin \gamma; f_{13} = b[(Z_C - d \sin \theta)(\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) - (X_C - d \cos \theta) \cos \beta \cos \gamma]; f_{21} = b(Z_C - d \sin \theta)(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma); f_{22} = b[(X_C - d \cos \theta - a) \sin \beta + (Z_C - d \sin \theta) \cos \alpha \cos \beta] \sin \gamma; f_{23} = b[(Z_C - d \sin \theta)(\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) -$$

$$\begin{aligned}
& (X_C - d \cos \theta - a) \cos \beta \cos \gamma]; f_{31} = b[Y_A(\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) + Z_A(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma)]; \\
& f_{32} = b[(X_A - a) \sin \beta + Y_A \sin \alpha \cos \beta - Z_A \cos \alpha \cos \beta] \cos \gamma; f_{33} = b[Y_A(\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \\
& Z_A(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) + (a - X_A) \cos \beta \sin \gamma]; u_{11} = l_1 - d[(X_C - d \cos \theta) \sin \theta - (Z_C - \\
& d \sin \theta) \cos \theta](u_1 n_1 + v_1 n_2 + w_1 n_3); u_{12} = l_1 - d[(X_C - d \cos \theta) \sin \theta - (Z_C - d \sin \theta) \cos \theta](u_1 m_1 + v_1 \\
& m_2 + w_1 m_3); u_{21} = l_2 - d[(X_C - d \cos \theta - a) \sin \theta - (Z_C - d \sin \theta) \cos \theta](u_1 n_1 + v_1 n_2 + w_1 n_3); u_{22} = l_2 - \\
& d[(X_C - d \cos \theta - a) \sin \theta - (Z_C - d \sin \theta) \cos \theta](u_1 m_1 + v_1 m_2 + w_1 m_3); u_1 = 2 \\
& \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}(C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}) \pm (C_3 - C_1)C_1}{[(-C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2})^2 + (C_3 - C_1)^2] \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}}; n_1 = \frac{2dl_1}{a}; m_1 = -\frac{2dl_2}{a}; v_1 = \\
& \frac{(C_3 - C_1)(-\sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2} \pm C_2)}{[(-C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2})^2 + (C_3 - C_1)^2] \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}}; n_2 = \frac{2d(a - X_D)l_1}{aZ_D}; m_2 = \frac{2dX_D l_2}{aZ_D}; \\
& w_1 = \frac{-\sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}(C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}) \pm (C_1 - C_3)C_3}{[(-C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2})^2 + (C_3 - C_1)^2] \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}}; n_3 = \frac{2(aZ_D - al + X_D l)l_1}{aZ_D}; \\
& m_3 = \frac{-2lX_D l_2}{aZ_D}.
\end{aligned}$$

## 4.2 奇异位置求解

式(13)中  $\mathbf{J}_p$  和  $\mathbf{J}_q$  只要有 1 个矩阵的行列式为 0, 该机构就会出现奇异位置。据此, 可将并联机构的奇异位置分为 3 类: 输入奇异、输出奇异、综合奇异。

### 4.2.1 输入奇异

当并联机构工作空间的边界或者位置逆解数目发生变化时, 产生输入奇异。此时, 机构的执行构件将失去某个方向的运动能力。

当  $\det(\mathbf{J}_q) = 0$  时, 机构将产生输入奇异。若想  $\det(\mathbf{J}_q) = 0$  成立, 存在 2 种情况:

1)  $l_3 = 0$ , 此时将产生输入奇异。

2)  $u_{11}u_{22} = u_{12}u_{21}$ , 令  $g_1 = d[(X_C - d \cos \theta) \sin \theta - (Z_C - d \sin \theta) \cos \theta]$ ,  $g_2 = d[(X_C - d \cos \theta - a) \sin \theta - (Z_C - d \sin \theta) \cos \theta]$ ,  $h_1 = u_1 n_1 + v_1 n_2 + w_1 n_3$ ,  $h_2 = u_1 m_1 + v_1 m_2 + w_1 m_3$ , 则  $u_{11}u_{22} = u_{12}u_{21}$  可表示为  $l_1 g_2(h_1 - h_2) = l_2 g_1(h_1 - h_2)$ , 分情况讨论如下:

若  $h_1 - h_2 = 0$ , 此时产生输入奇异。

若  $h_1 - h_2 \neq 0$ , 则  $l_1 g_2 = l_2 g_1$ , 即  $[(l_1 - l_2)X_C - l_1 a] \sin \theta = (l_1 - l_2)Z_C \cos \theta$ , 如果  $(l_1 - l_2)X_C \neq l_1 a$  且  $\cos \theta \neq 0$ , 则  $\tan \theta = \frac{(l_1 - l_2)Z_C}{(l_1 - l_2)X_C - l_1 a}$ , 此时将发生输入奇异。

如果  $l_1 = l_2$  且  $\sin \theta = 0$ , 此时机构将发生输入奇异, 如图 3 所示。

### 4.2.2 输出奇异

此时产生奇异的条件为  $\det(\mathbf{J}_p) = 0$ , 这种类型的奇异发生在并联机构的工作空间内部, 称为位形奇异(内部奇异)。当并联机构的输入驱动关节固定时, 末端执行器仍存在瞬时运动, 表明机构至少获得了一个瞬时自由度, 这时并联机构失去刚度, 无法承受任何载荷。

若要使  $\det(\mathbf{J}_p) = 0$  成立, 只存在 2 种情况:

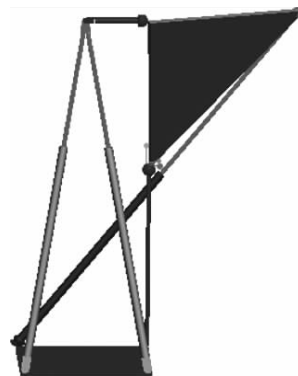


图 3 输入奇异位形图

Fig.3 Input singular configuration

1) 矩阵  $J_P$  中有 2 个向量线性相关

令  $(f_{i1} \ f_{i2} \ f_{i3}) = \mathbf{e}_i \ (i=1,2,3)$ , 则矩阵  $J_P$  中有 2 个向量线性相关时有 3 种情况:  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  线性相关,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$  线性相关,  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  线性相关。

若  $t\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ , 则  $t[f_{11} \ f_{12} \ f_{13}] = [f_{21} \ f_{22} \ f_{23}]$ , 其中  $t$  为实常数。因为  $f_{11} = f_{21} = bZ_D(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$ , 即  $f_{11} = f_{21} = Y_C Z_D = aZ_D$ , 此时分 2 种情况:

如果  $Z_D = 0$ , 则  $tf_{12} = f_{22}, tf_{13} = f_{23}$ , 即  $tX_D\sin\beta\sin\gamma = (X_D - a)\sin\beta\sin\gamma, tX_D\cos\beta\cos\gamma = (X_D - a)\cos\beta\cos\gamma$ , 此时  $tX_D = X_D - a$ , 机构将产生输出奇异;

如果  $Z_D \neq 0$ , 则  $t = 1$ , 此时  $f_{12} = f_{22}, f_{13} = f_{23}$ , 即

$$(X_C - d\cos\theta)\sin\beta\sin\gamma = (X_C - d\cos\theta - a)\sin\beta\sin\gamma \quad (14)$$

$$(X_C - d\cos\theta)\cos\beta\cos\gamma = (X_C - d\cos\theta - a)\cos\beta\cos\gamma \quad (15)$$

要想式(14)、式(15)成立, 则  $\sin\beta\sin\gamma = \cos\beta\cos\gamma = 0$ , 进而得到  $\sin\beta = 0, \cos\gamma = 0$  或  $\cos\beta = 0, \sin\gamma = 0$ , 此时,  $A, C$  点的  $x$  坐标均为 0, 此时将产生输出奇异, 奇异位置如图 4 所示。

$t\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3; t\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$  的情况与上述类似, 此处省略。

2) 矩阵  $J_P$  中有 3 个向量线性相关

矩阵  $J_P$  中有 3 个向量线性相关, 即  $\mathbf{e}_1 = k_1\mathbf{e}_2 + k_2\mathbf{e}_3$  线性相关, 其中  $k_1, k_2$  为实常数, 此时找不到具体的几何关系, 不予讨论。

#### 4.2.3 组合奇异

产生奇异的条件为  $\det(J_q) = 0$  且  $\det(J_P) = 0$ , 这意味着只有当输入奇异和输出奇异同时发生时才能产生, 在此位形下, 动平台将失去原有的运动特性。此时  $l_1 = l_2, \sin\theta = 0$  且  $A, C$  点的  $x$  坐标均为 0, 组合奇异位形如图 5 所示。

### 5 工作空间内的奇异分析

并联机构的可达工作空间, 是指在考虑运动副转角范围、杆长不干涉且无奇异位置的情况下, 末端执行器的工作区域。本文采用极限边界搜索法解该并联机构的工作空间, 首先, 根据动平台转角来设定工作空间的搜索范围, 然后, 基于机构的位置逆解公式(12), 搜索所有满足约束条件的点, 由这些点组成的三维图即为该并联机构的工作空间。

确定搜索范围:  $-120^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ, -120^\circ \leq \beta \leq 120^\circ, -120^\circ \leq \gamma \leq 120^\circ$ , 通过 Matlab 软件, 可得到机构的三维工作空间及不同  $Z$  值下的  $X$ - $Y$  截面图, 如图 6 所示。由图 6 可知, 该三转动机构的工作空间是球面的一部分; 且随着  $Z$  值的增加,  $X$ - $Y$  截面越来越小。

### 6 结论

1) 设计的零耦合度球面并联机构, 与 3-RRR 机构相比, 不需要 9 个转动副轴线必须相交于一点的装配要求, 因此, 具有制造、装配简单的优点; 与 S+3-SPS 机构相比, 省去了 3 个球副, 制造方便。因该机构耦合度为 0, 可以直接推导出其解析正解公式, 而不需要复杂的数学推导过程, 且易于实现计算机



图4 输出奇异位形图

Fig.4 Output singular configuration

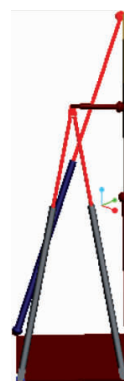
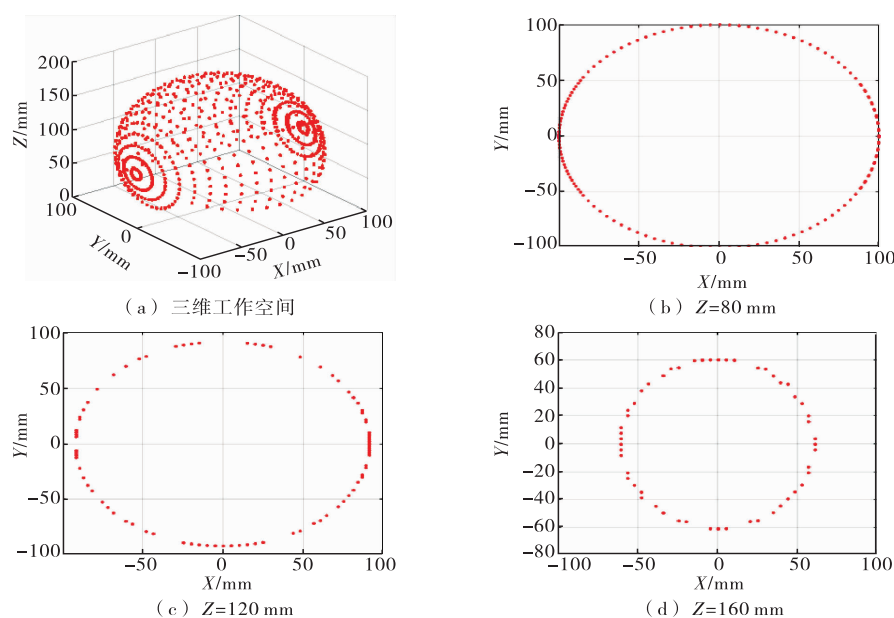


图5 组合奇异位形图

Fig.5 Combination singular configuration



图6 工作空间及不同  $Z$  值下的  $X$ - $Y$  截面图Fig.6 Three-dimensional workspace and  $X$ - $Y$  cross-sections at different  $Z$  values

自动化生成。

2) 机构工作空间分析表明,机构工作空间是球面的一部分,给出的3种奇异位形发生条件及其奇异位形图,对机构的刚度、轨迹规划与运动控制、动力学分析及样机设计有参考价值。

## 参考文献:

- [1]GOSSELIN C, ANGELES J. The optimum kinematic design of a spherical 3-DOF parallel manipulator[J]. ASME Journal of Mechanism & Design, 1989, 111(7): 202-207.
- [2]GOSSELIN C M, SEFRIQUI J, RICHARD M J. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators of general architecture[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1994, 116(2): 594-598.
- [3]何开明. 基于球面三角学的球面并联机构位姿正解[J]. 武汉理工大学学报, 2003, 25(6): 46-49.
- [4]赖一楠, 张广玉, 段志鸣, 等. 面向控制的 3-RRR 球面并联机构正运动学实时解法[J]. 中国机械工程, 2003, 14(2): 46-49.
- [5]杨加伦, 高峰, 戚开诚, 等. 正交三自由度球面并联机构的位置正反解新方法[J]. 机械设计与研究, 2008, 24(3): 30-32.
- [6]鲁开讲, 牛禄峰, 雷文莉, 等. 球面三自由度并联机构位姿正解的研究[J]. 机械设计, 2005, 22(1): 59-61.
- [7]杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [8]向中凡, 张均富, 王进戈. 3PSS-S 型并联机构的奇异轨迹研究[J]. 机械传动, 2007, 31(4): 9-14.
- [9]GALLARDO J, RODRIGUEZ R. A family of spherical parallel manipulators with two legs[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43: 201-216.
- [10]于海波, 赵铁石, 李仕华, 等. 空间 3-SPS/S 对顶双锥机构的运动学分析[J]. 机械设计, 2007, 24(2): 11-13.
- [11]崔国华, 张艳伟, 张英爽, 等. 空间转动 3-SPS/S 并联机器人的构型设计分析[J]. 吉林大学学报, 2009, 39(1): 200-205.
- [12]张艳伟, 韦斌, 王南, 等. 空间转动 3-SPS-S 并联机构运动学性能分析[J]. 农业机械学报, 2012, 43(4): 212-215.
- [13]沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.

(责任编辑:李艳,谭晓荷)