

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2020.04.0011

## 同心协力策略优化研究

王 琼<sup>1</sup>, 李 鑫<sup>2</sup>, 窦海波<sup>2</sup>, 刘卓欣<sup>2</sup>, 江兴方<sup>3</sup>

(1.常州大学 阿里云大数据学院,江苏 常州 213164; 2.常州大学 华罗庚学院,江苏 常州 213164; 3.常州大学 数理学院,江苏 常州 213164)

**摘要:**将鼓视作空心圆柱刚体,引入碰撞恢复系数和转动惯量,同时以单个周期内队员做的功最少和休息时间最长为最优策略,分别构建理想状态和非理想状态下同心协力策略优化模型。通过实例讨论了队员发力情况对鼓面倾角的影响以及鼓面存在倾角时的策略优化问题。结果表明:非理想状态下鼓面存在倾角,为使球反弹后仍保持竖直方向,与合力相邻的两位队员发力时机和大小需不同于其他不参与调整的队员;参与调整的两位队员相隔越远,对鼓面倾角的影响越小。

**关键词:**同心鼓运动;同心协力策略;鼓面倾角

**中图分类号:**O 29

**文献标志码:**A

**文章编号:**2095-0411(2020)04-0077-06

## Research on the Optimization of Concentric Cooperation Strategy

WANG Qiong<sup>1</sup>, LI Xin<sup>2</sup>, DOU Haibo<sup>2</sup>, LIU Zhuoxin<sup>2</sup>, JIANG Xingfang<sup>3</sup>

(1. Aliyun School of Big Data, Changzhou University, Changzhou 213164, China; 2. Hua Loo Keng Honors College, Changzhou University, Changzhou 213164, China; 3. School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** Concentric drum movement is a project that needs many people to work together. The drum is regarded as a hollow cylinder rigid body, and the collision recovery coefficient and rotary inertia model are introduced. At the same time, the optimal concentric cooperation strategy is to maximize the ratio of the rest time of team members and the work done by team members. The strategy optimization models of concentric cooperation under ideal and non-ideal conditions are constructed respectively. This paper discusses the effect of different force conditions on the angle of the drum surface and the optimization of the strategy when the angle of the drum surface existed. The results show that there is an angle of the drum surface in the non-ideal state. In order to keep the ball vertical after rebounding, the timing and force of the two members adjacent to the resultant force should be different from the other members who do not participate in the adjustment. The farther the distance between the two

**收稿日期:**2019-12-15。

**作者简介:**王琼(1981—),女,浙江金华人,硕士,讲师。E-mail:wangqiong@cczu.edu.cn

**引用本文:**王琼,李鑫,窦海波,等.同心协力策略优化研究[J].常州大学学报(自然科学版),2020,32(4):77-82.

members involved in the adjustment, the less the effect on the drum inclination.

**Key words:** collision recovery coefficient; rotary inertia model; hollow cylinder rigid body

同心鼓运动是一项与团队协作能力密切相关的活动。该活动需要一个双面牛皮鼓,鼓四周均匀固定若干根绳子,并且每根绳子的长度以及材质都相同。团队成员每人牵引一根绳子,保持鼓面水平。活动开始的时候,球从鼓面中心正上方自由落体,队员们同时将球颠起,使其有节奏地在鼓面上上下下弹跳。颠球过程中,所有队员只能抓握绳子的末端,不能接触其他位置,要使球被颠起的高度不低于某一固定值,同时尽可能多地连续颠球。

为了获取团队最优颠球策略,需要了解团队队员、球以及同心鼓三者之间在整个运动过程中的关系。本文构建理想状态和非理想状态下同心协力策略优化模型,通过实例分析研究队员发力情况对鼓面倾角的影响,以及鼓面存在倾角时的策略优化问题。

## 1 模型构建

### 1.1 理想状态下同心协力策略优化模型

考虑到同心鼓运动是一种技巧性的活动,最后的胜负取决于连续颠球的次数。显然,同心鼓运动属于策略优化问题。颠球的次数是由球被颠起一次做功大小、球从鼓面弹起到再一次接触鼓面的时间以及一些人为因素等共同影响。

理想状态下,运动过程中每个队员都能够精确控制颠球所需要的条件,因此,每个队员发力时机和发力大小相同,鼓面始终保持水平状态。队员单次颠球做的功  $W$ 、球从鼓面弹起到再一次接触鼓面的时间  $T$  直接影响了连续颠球的总次数。

假定球从起始点落下之后,队员精确控制使得球反弹到特定高度  $H_f$ ,而后保持鼓面在最低点不动使球与鼓面碰撞后自行弹起  $k$  次,直至球弹起的高度有低于  $d$  的趋势,之后队员再次精确控制将球颠起反弹到特定高度  $H_f$ ,一直循环往复。为保证连续颠球次数最多,可将单个周期内队员做的功最少且休息时间最长视为策略最佳,即  $T/W$  最大,同时满足颠球高度不小于规定的球弹起的最低高度  $d$ 。

根据相关参考文献,整个颠球过程中,假设球与鼓面发生碰撞时鼓面不发生形变,这时可将同心鼓视为空心圆柱刚体<sup>[1-2]</sup>,重量分布在边缘且内圆环与外圆环半径  $R$  基本相等。

球从最高点下降到与鼓面碰撞的这一过程中,空气阻力不计,此时球视为自由落体运动,有  $gT^2 = 8(H_1 - h)$ ,其中  $H_1$  为球上升至最高点时下底面距离地面的高度; $h$  为球与鼓面碰撞处距离地面的高度; $g$  为万有引力常数。在鼓面上升且没有与球接触的过程中,人对鼓所做的功全部转化为鼓的动能与重力势能,表示为  $W = m_1 g(h - H_2) + \frac{1}{2} m_1 (V_1')^2$ ,其中  $m_1$  为鼓的质量; $H_2$  为鼓在不受拉力的作用下,依靠重力下落到最低点时上表面距离地面的高度; $V_1'$  为鼓碰撞前的速度。

队员对鼓施加力之后,鼓面与球运动直至相互碰撞的过程中,始终没有外力对该系统进行作用,因此,由动量守恒定律有  $m_1 V_1' + m_2 V_2' = m_1 V_1 + m_2 V_2$ ,其中  $m_2$  为球的质量; $V_1 = z'$  为鼓碰撞后的速度; $V_2$  为球第一次碰撞后的速度; $V_2'$  为球第一次碰撞前的速度。参考相关文献<sup>[3-5]</sup>,引入碰撞恢复系数  $e = \left| \frac{V_2 - V_1}{V_1' - V_2'} \right|$ ,可得  $V_1 = \frac{eV_2 - V_2'}{1 + e}$  和  $V_2 = \frac{(1 + e)m_1 V_1'}{2(1 + e)m_2 + (e - 1)m_1}$ 。

考虑初始状态时同心鼓与拉绳均处于水平位置,以此时同心鼓鼓面中心为坐标原点,鼓面向上运动

为坐标轴的正向,从而得到整个运动过程中鼓面中心  $z$  的运动轨迹。由牛顿第二定律,有  $m_1 g -$

$\sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha = m_1 \frac{d^2 z}{dt^2}$ 。根据微分方程求解方法<sup>[5]</sup>,得到鼓面中心的运动方程为

$$z(t) = \frac{m_1 g l}{\sum_{i=1}^n F_i} + \frac{m_1 g l}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{F_i F_0}{F_i - F_0} \right)} \cos \left( \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i}{m_1 l}} t \right) \quad (1)$$

式中: $l$ 为拉绳长度; $F_i$ 为第 $i$ 个人在 $t$ 时刻对绳子的拉力; $F_0$ 为初始状态第 $i$ 个人对绳子的拉力; $n$ 为队员人数; $\alpha_i$ 为绳子与水平方向的夹角。理想状态中每个队员对绳子的拉力大小以及绳子与水平方向的夹角都是相同的。

综合以上分析,构建理想状态下同心协力策略优化模型,具体如式(2)

$$\begin{aligned} \left( \frac{T}{W} \right)_{\max} &= \frac{2(1-e^k)V_2}{(1-e)\left(m_1 g^2(h-H_2) + \frac{1}{2}m_1 g(z')^2\right)} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \frac{(V_2 \cdot e^{k-1})^2}{2g} + h - H_2 > d \\ V_2 = \frac{(1+e)m_1 z'}{2(1+e)m_2 + (e-1)m_1} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

## 1.2 非理想状态下同心协力策略优化模型

现实情况中,所有队员的发力时机及大小难以做到精确控制,若颠球高度较大,将会导致哪怕是鼓面存在微小倾斜也会使得球掉落出鼓面。为此,将颠球一次自由反弹次数变小,从而大大降低颠球所需高度,以弥补模型的不足。通过对球下降到达的水平位置与鼓面倾角的关系进行模拟,研究发现鼓面倾角较小时,倾角越大,球下降到达的水平位置越远。为此将颠球策略调整为颠球1次,球自由反弹1次。

当鼓面出现倾斜角度 $\theta$ 时,每位队员通过调整绳子对同心鼓的拉力不全相同。根据参考文献<sup>[7]</sup>,对鼓进行受力分析,可知队员们使用相同的拉力不会使鼓面发生倾斜。因此,每个队员方向相反大小相同的作用力相互抵消,可视为只有合力 $F$ 对鼓进行作用。由转动定律以及空心圆柱体的转动惯量公式<sup>[8-11]</sup>,有

$$J_0 = \frac{m_1 L^2}{12} + \frac{m_1 R^2}{2} \text{ 且 } F \cos \theta \cdot r = J_0 \beta$$

式中 $r$ 为同心鼓中切线的力矩。

结合同心鼓的角速度 $\omega$ 、角加速度 $\beta$ 以及倾斜角度 $\theta$ 之间的关系,可以得到鼓面倾角 $\theta$ 的方程

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2F \cdot r \sin \theta}{\frac{m_1 L^2}{12} + \frac{m_1 R^2}{2}}} \quad (3)$$

球碰撞后水平方向速度为 $V_{2x} = V_2 \sin 2\theta$ ,竖直方向速度为 $V_{2y} = V_2 \cos 2\theta$ 。当球与鼓面反弹过后在空中做斜抛运动,根据斜抛公式,可得球反弹过后在空间运动的时间为 $t = 2g^{-1}V_{2y}$ 。之后,球会落到距离鼓面中心 $d = g^{-1}V_{2x}^2 \sin 4\theta$ 处。经计算可得

$$d = \frac{(1+e)^2 m_1^2 (z')^2 \sin^2 2\theta \cdot \sin 4\theta}{2(1+e)gm_2 + (e-1)gm_1}$$

显然该距离不能超过鼓面半径。

由于鼓面倾斜导致球的反弹相对于竖直方向会产生偏移角度  $\delta$ , 因此, 需要队员们调整拉绳的策略。不难发现, 鼓的转动轴是一条与球投影所在直径相垂直的线。因此, 可通过小球倾斜方向在水平面的投影方向确定旋转轴的位置。建立二维坐标轴模型, 如图 1 所示, 鼓面以单位圆表示, 球倾斜方向在

水平面的投影为直线  $PQ: y = \tan(\frac{\pi}{2} - \gamma)x$  斜上方

向, 鼓面的旋转轴为  $l: y = -x \tan \gamma$ 。

当球撞击鼓面时, 均匀分布的队员调整绳子将鼓面倾斜以使球最终调整为竖直弹跳, 如图 1 所示。可以发现球所在直径与另一半圆的交点  $Q$  即为队员施加的合力  $F$  所作用的点, 从而将合力分配到与其相邻的 2 个作用点  $M$  和  $N$ , 竖直向上的额外作用力分别为  $F_{My}$  和  $F_{Ny}$ , 其他点受到竖直向上的作用力均为  $F_{ly} = m_1 g / n$ 。根据额外力作用时间  $t$  与鼓面倾斜角度  $\theta$  的关系以及力矩关系, 有

$$t = \frac{2(1+e)m_1 V_1 \cos 2\theta}{2(1+e)gm_2 + (e-1)gm_1} \quad (4)$$

$$F_{My} = F_{ly} \frac{R \sin \gamma}{(1+R/l) \cos \theta \sin(\varphi + \gamma)} \quad (5)$$

$$F_{Ny} = F_{ly} \frac{R \sin \varphi}{(1+R/l) \cos \theta \sin(\varphi + \gamma)} \quad (6)$$

式中:  $F_{ly}$  为不参与调整的队员施加的竖直向上作用力;  $F_{My}$  和  $F_{Ny}$  分别为与合力相邻的 2 位队员施加的竖直向上的额外作用力;  $\gamma$  为球倾斜方向的水平投影  $PQ$  与  $OM$  的夹角;  $\varphi$  为球倾斜方向的水平投影  $PQ$  与  $ON$  的夹角。

因此, 构建非理想状态下同心协力策略优化模型, 具体如式(7)为

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{W}\right)_{\max} &= \frac{2(1+e)m_1 V_1}{\left(m_1 g^2(h-H_2) + \frac{1}{2}m_1 g V_1^2\right)(2(1+e)m_2 + (e-1)m_1)} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \frac{V_2^2}{2g} + h - H_2 > d \\ V_2 = \frac{(1+e)m_1 V_1}{2(1+e)m_2 + (e-1)m_1} \\ \frac{(1+e)^2 m_1^2 (z')^2 \sin^2 2\theta \cdot \sin 4\theta}{2(1+e)gm_2 + (e-1)gm_1} < R \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

## 2 数值模拟与分析

### 2.1 不同发力时机及大小对鼓面倾角的影响

假设同心鼓采用质量为 3 600 g, 半径为 20 cm 和高度为 22 cm 的双面牛皮鼓, 球的质量为 270 g。

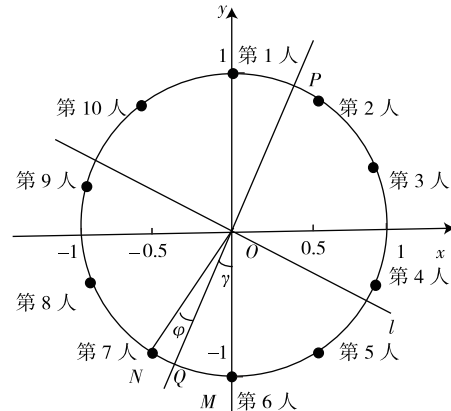


图 1 同心鼓运动的俯视图

Fig.1 Vertical view of concentric drum movement

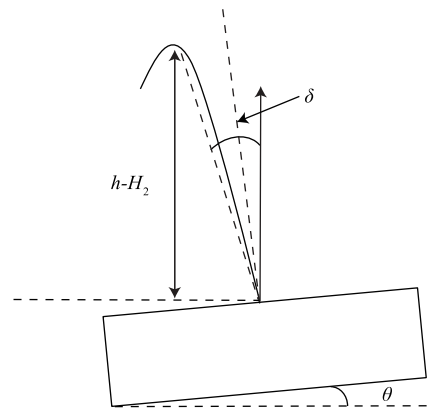


图 2 球反弹后运动轨迹

Fig.2 Trajectory of the ball after rebounding

若队员总人数为 8,绳长 1.7 m,最初鼓面比绳子水平位置低 11 cm。根据非理想状态下同心协作策略优化模型(7),基于模拟退火的寻优运算<sup>[12-13]</sup>,通过 Matlab 软件编程实现,可以得到在每位队员不同发力情况下 0.1 s 时鼓面倾斜角度,具体结果见表 1。

从表 1 可以发现,在其他队员发力情况保持不变的条件下,参与发力时间和发力大小调整的 2 位队员相隔越远,对鼓面倾角的影响越小。

图 3 给出了鼓面倾斜调整用时与竖直方向合力大小之间的关系。所有队员竖直方向上的合力越大,鼓面发生倾斜的用时越少,与实际情况相吻合,模型合理。

表 1 不同发力情况下的鼓面倾斜角度  
Table 1 Inclination angle of drum surface under different forces

队员	用力参数(发力时机/s,发力大小/N)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
第 1 人	(0,90)	(0,90)	(0,90)	(-0.1,80)	(-0.1,80)	(-0.1,80)	(-0.1,90)	(0,90)	(0,90)
第 2 人	(0,80)	(0,90)	(0,80)	(0,80)	(-0.1,80)	(0,80)	(0,80)	(-0.1,80)	(0,80)
第 3 人	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)
第 4 人	(0,80)	(0,80)	(0,90)	(0,80)	(0,80)	(-0.1,80)	(0,80)	(0,90)	(0,90)
第 5 人	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(-0.1,80)	(-0.1,80)
第 6 人	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)
第 7 人	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)
第 8 人	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(0,80)	(-0.1,80)
鼓面倾角/(°)	0.428 5	0.793 2	0.328 5	1.285 5	2.481 3	1.029 8	1.743 6	1.281 4	0.686 4

2.2 不同状态下队员的发力时机与用力大小分析

假设同心鼓采用质量为 3 600 g、半径为 20 cm 和高度为 22 cm 的双面牛皮鼓,球的质量为 270 g。若队员总人数为 10,均匀站在鼓的四周,且队员之间的距离最少为 60 cm,绳长为 2 m。当活动开始时,球从鼓面正上方 40 cm 处落下,球被颠起的高度应该超过鼓面 40 cm,否则活动将被终止。最初鼓面比绳子水平位置低 10 cm。理想状态下,球反弹不产生任何倾斜;而非理想状态下,球的反弹最高为 60 cm,且会产生竖直方向 1°的倾斜。

理想状态下,所有队员能精确控制所需条件,即鼓面不存在倾斜的情况。球从鼓面正上方 40 cm 处落下,所有队员在 0.18 s 时开始同时发力,大小为 72 N,作用力时长为 0.247 s,碰撞后鼓的速度为 0.526 m/s,颠球高度为 0.46 m,  $T/W$  最大为 1.124。

非理想状态下,所有队员发力情况不全相同,对绳子作用力的合力越大,鼓面发生倾斜所需的用时就越少,这与实际相吻合。由于队员都是等距站立,每两个队员之间夹角都为 36°。又球倾斜方向的水平投影指向某两位队员之间,与这两位队员的夹角为 1:2 的关系,因此有  $\varphi = 12^\circ$ ,  $\gamma = 24^\circ$ 。通过基于模拟退火的寻优运算,可计算得到参与调整的两两位队员对绳子作用力分别为  $F_M = 83.06$  N,  $F_N = 77.66$  N,其他队员的作用力为 72 N。队员需在球从下落 0.043 2 s 后开始发力,需用时为 0.278 6 s。采

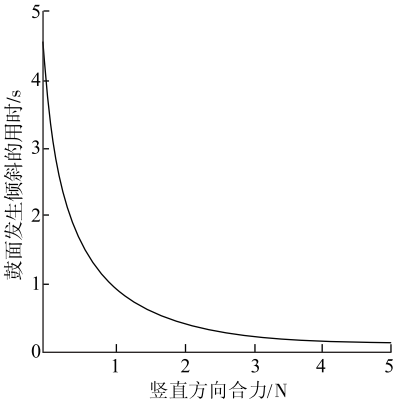


图 3 鼓面倾斜调整用时与竖直合力大小关系  
Fig.3 Relation between adjustment time of drum and vertical component force

取这种策略时,与鼓面碰撞后球反弹高度为 0.574 1 m,倾角为  $0.163^{\circ}$ 。此时,  $T/W$  最大为 1.839。

### 3 结 论

针对多人协作的同心鼓运动,基于空心圆柱刚体和转动惯量模型,以单个周期内队员做的功最少且休息时间较长为最佳策略,分别构建理想状态与非理想状态下同心协力策略优化模型。构建的模型结构简单,便于编程实现。通过实例分析,结果表明参与发力调整的两位队员相隔越远,对鼓面倾角的影响越小;竖直方向上的合力越大,鼓面发生倾斜的用时越少。理想状态下,各队员发力时机和发力大小均相同,以保证鼓面处于水平位置;非理想状态下鼓面发生倾斜,为使球反弹后仍保持竖直方向,与合力相邻的两位队员发力情况需不同于其他不参与调整的队员,整个策略的实施易受队员主观因素的影响,需要各队员的高度协作。任何轻微误差都可能引起鼓面倾斜角度和用时的变化,最终影响球和鼓面中心的运动轨迹。这也体现了这项团体运动对多人同心协力的要求。

### 参考文献:

- [1]江兴方,谢建生,唐丽. 物理实验[M]. 北京:科学出版社,2015.
- [2]王检耀,刘铸永,洪嘉振. 基于两种接触模型的柔性体间多次微碰撞问题研究[J]. 振动与冲击,2018,37(11): 202-206.
- [3]梅雪峰,胡卸文,罗刚,等. 基于弹塑性理论的落石碰撞恢复系数和峰值冲击力研究[J]. 振动与冲击,2019,38(8): 14-20.
- [4]章广成,向欣,唐辉明. 落石碰撞恢复系数的现场试验与数值计算[J]. 岩石力学与工程学报,2011,30(6): 1266-1273.
- [5]葛藤,贾智宏,周克栋. 计算点接触碰撞恢复系数的一种理论模型[J]. 机械设计与研究,2007,23(3): 14-15, 22.
- [6]AGMON S, DOUGLIS A, NIRENBERG L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II[J]. Communications on Pure & Applied Mathematics, 1964, 17(1): 35-92.
- [7]秦敢,向守平. 力学与理论力学[M]. 北京:科学出版社,2017:132-138.
- [8]虞磊,赵治华,任启鸿,等. 基于绝对节点坐标的柔性体碰撞仿真[J]. 清华大学学报(自然科学版),2010(7): 173-178.
- [9]KHAN I M, ANDERSON K S. A logarithmic complexity divide-and-conquer algorithm for multi-flexible-body dynamics including large deformations[J]. Multibody System Dynamics, 2015, 34(1):81-101.
- [10]BAO R, RUI X T, TAO L, et al. Theoretical modeling and numerical solution methods for flexible multibody system dynamics[J]. Nonlinear Dynamics, 2019(98): 1519-1553.
- [11]杨克昌. 均质圆柱类刚体对任意轴的转动惯量计算公式[J]. 力学与实践,1983(5): 53-54.
- [12]李元香,项正龙,夏界宁. 模拟退火算法的动力系统模型及收敛性分析[J]. 计算机学报,2019,42(6): 1161-1173.
- [13]张良均,杨坦,肖刚,等. Matlab 数据分析与挖掘实战[M]. 北京:机械工业出版社,2016.

(责任编辑:李艳)