

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2021.02.007

# 一种低耦合度非完全对称 2T1R 并联机构的 运动分析与刚度建模

陈 谱<sup>1</sup>, 沈惠平<sup>1</sup>, 邓嘉鸣<sup>1</sup>, 吴广磊<sup>2</sup>

(1. 常州大学 机械与轨道交通学院, 江苏 常州 213164; 2. 大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:**基于方位特征(POC)的并联机构设计理论,提出了一种低耦合度非完全对称的 2T1R 并联机构。首先根据序单开链法的机构运动学建模原理,分别给出该机构位置正反解的求解算法,并通过数值算例验证了其正确性;其次针对该机构的刚度特性问题,基于虚拟弹簧法建立了该并联机构的刚度模型;最后分析了该机构刚度矩阵中扭转刚度和线性刚度的变化趋势,得出该机构的刚度在工作空间内变化较为平稳,能承受较大载荷,为该机构的动力学分析及样机设计提供了理论基础。

**关键词:**拓扑设计;方位特征集(POC);刚度矩阵;虚拟弹簧法

中图分类号:TH 112

文献标志码:A

文章编号:2095-0411(2021)02-0052-10

## Kinematic Analysis and Stiffness Modeling of a Low Coupling Asymmetric 2T1R Parallel Mechanism

CHEN Pu<sup>1</sup>, SHEN Huiping<sup>1</sup>, DENG Jiaming<sup>1</sup>, WU Guanglei<sup>2</sup>

(1.School of Mechanical Engineering and Rail Transit,Changzhou University,Changzhou 213164,China; 2. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024,China)

**Abstract:**Based on the design theory of POC parallel mechanism, a low coupling degree and incomplete symmetry 2T1R parallel mechanism is proposed.Firstly, according to the modeling principle of kinematic of the mechanism based on ordered SOC, the solution algorithm of the forward and inverse position of this parallel mechanism are derived, and an numerical example is provided to confirm the correctness of the solution procedure.Secondly aiming at the stiffness characteristics of the parallel mechanism,the stiffness model of the parallel mechanism is established based on the virtual spring method.Finally, the change trend of torsional stiffness and linear stiffness in cartesian stiffness matrix were

收稿日期:2020-10-16。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975062,51375062)。

作者简介:陈谱(1995—),男,江苏徐州人,硕士生。通信联系人:沈惠平(1965—),E-mail:shp65@126.com

引用本文:陈谱,沈惠平,邓嘉鸣,等.一种低耦合度非完全对称 2T1R 并联机构的运动分析与刚度建模[J].常州大学学报(自然科学版),2021,33(2):52-61.

analyzed. The results show that the stiffness of the mechanism changes smoothly in the working space and can bear large load. This work provides a theoretical basis for the dynamic analysis and prototype design of the PM.

**Key words:** topology design; POC; stiffness matrix; virtual spring method

并联机构的刚度是评价并联机构性能的重要指标,由于并联机构的刚度随位姿变化,必须了解机构位姿与刚度的关系。现有的刚度分析方法主要有有限元分析法(FEA)、矩阵结构分析法(MSA)、虚拟关节分析方法(VJM)和虚拟弹簧法(VSM)。

FEA法<sup>[1-4]</sup>计算简便,精度较高,但耗时多,工作量大。CORRADINI等<sup>[1]</sup>采用该方法对一种新型四自由度并联机器人进行了刚度计算;AVILÉS等<sup>[2]</sup>基于有限元分析,说明了如何由杆单元组成的简单模型的刚度矩阵来获得机构刚体运动的运动特性。

MSA法<sup>[5-6]</sup>与FEA法相比,降低了运算量,但无法直接得到笛卡尔系的刚度矩阵,需将矩阵降维处理。DEBLAISE等<sup>[5]</sup>提出了一种基于矩阵结构分析的并联机构刚度矩阵计算方法。ECORCHARD等<sup>[6]</sup>提出了一种能同时识别细长杆件冗余驱动并联机构几何参数和刚度参数的有效弹性几何和标定方法。

VJM法<sup>[7-8]</sup>应用最广泛,它将杆件视为刚体,并虚设柔性关节(为了累积杆件或者关节的柔性变形),这近似等效于在关节中添加虚拟关节,显然,这种机构柔性的集总表现简化了模型。VERTECHY等<sup>[7]</sup>采用系统弹性势能的 Hessian 对称刚度矩阵代替笛卡尔刚度矩阵,来描述机械臂的刚度特性,分析了2自由度平行球面腕关节的约束情况。GOSSELIN等<sup>[8]</sup>介绍了一种正交滑块的参数刚度分析方法,进行了柔性建模和刚度矩阵的符号表示。

VSM法<sup>[9]</sup>基于VJM法,并结合MSA法,在不考虑预载荷的情况下,在杆件末端增加虚拟弹簧来描述杆件弹性,用弹簧弹性系数表示刚度系数。陈超等<sup>[10]</sup>从单元柔度矩阵的角度研究了机构的静刚度,分析了一种新型3-RPS并联机构的刚度特性。WU等<sup>[11]</sup>对3-PPR并联机械手进行了刚度分析,并用数值法将笛卡尔刚度矩阵解耦为平移刚度矩阵和旋转刚度矩阵。同时,基于该方法对含有4条相同支链并联机器人的刚度特性进行了分析,指出Ragnar机器人的结构刚度低于以Quattro结构为基础设计的其他机器人。

提出一种非完全对称的2T1R并联机构,在运动学分析的基础上,基于虚拟弹簧法建立了机构的刚度模型,并给出析其线性、扭转和整体的刚度特性分布图,分析了该机构的刚度特性。

## 1 机构设计及结构分析

### 1.1 机构设计

基于方位特征(POC)的并联机构设计理论,设计的两平移—转动(2T1R)机构如图1所示。该机构由静平台0、动平台1和3条支链(I, II, III)组成。混合支链I(HSOC)由两个平行四边形机构和一个转动副 $R_3$ 串联组成;II和III支链均为S-P-S支链。建立如图1所示坐标系O-XYZ,取静平台0的几何中心为原点O,Y轴水平向右,X轴垂直于Y轴向下,Z轴由右手法则确定。

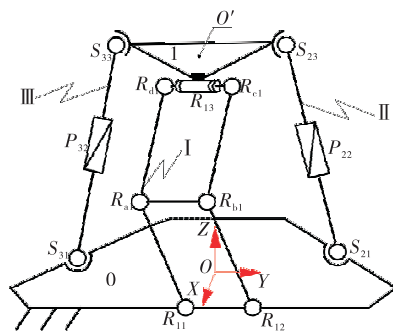


图1 2T1R 并联机构运动简图

Fig.1 Kinematic diagram of 2T1R parallel mechanism

## 1.2 并联机构拓扑分析

### 1.2.1 POC 集计算

1) 机构的 POC<sup>[12]</sup> 方程

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中:  $M_{ji}$  为第  $i$  个运动副的 POC 集;  $M_{bi}$  为第  $i$  个运动副的 POC 集;  $M_{Pa}$  为机构动平台 POC 集。

2) 机构的 POC 集

① 确定支链的拓扑结构

混合支链 I 的拓扑结构等效为  $\{-P^{(4R)}-P^{(4R)}-R_{13}-\}$ ; 简单支链 II 的拓扑为  $\{-S_{21}-P_{22}-S_{23}-\}$ ; III 的拓扑为  $\{-S_{31}-P_{32}-S_{33}-\}$ 。

② 选定动平台 1 中心为基点  $O'$

③ 确定支路末端 POC 集

支链 I 的 POC 集, 由式(1)得

$$M_I = \begin{bmatrix} t^1(||\Diamond YOZ) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(||\Diamond YOZ) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} \{t^1 \perp (R_{13})\} \\ r^1(||R_{13}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(||\Diamond YOZ) \\ r^1(||R_{13}) \end{bmatrix}$$

支链 II 和 III 的 POC 集相同, 由式(1)得  $M_{II} = M_{III} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$

④ 确定动平台 POC 集

$$\text{由式(2)得 } M_{Pa} = M_I \cap M_{II} \cap M_{III} = \begin{bmatrix} t^2(||\Diamond YOZ) \\ r^1(||R_{13}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(||\Diamond YOZ) \\ r^1(||R_{13}) \end{bmatrix}$$

因此, 动平台 1 可实现 YOZ 平面内的两维平移和转动副  $R_{13}$  轴线方向的一维转动。

### 1.2.2 自由度计算

1) 自由度公式

并联机构的 DOF<sup>[12]</sup> 公式为:

$$\sum_{j=1}^v \xi_{Lj} = \dim. \{ (\bigcap_{j=1}^v M_{bj}) \cup M_{b(j+1)} \} \quad (3)$$

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (4)$$

式中:  $F$  为机构自由度;  $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度;  $m$  为运动副数;  $v$  为独立回路数;  $\xi_{Lj}$  为第  $j$  个独立回路的独立位移方程数;  $\bigcap_{j=1}^v M_{bj}$  为前  $v$  条支链组成的子并联机构 POC 集;  $M_{b(j+1)}$  为第  $j+1$  条支链末端构件的 POC 集。

2) 确定本机构的自由度

由支链 I 和 II 组成第一个回路, 由式(3)得其独立位移方程数为

$$\xi_{L1} = \dim. \{ M_I \cap M_{II} \} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

该子并联机构的自由度, 由式(4)得

$$F_{(I-II)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} = (3+6) - 6 = 3$$

该子并联机构的 POC 集,由式(2)得

$$M_{Pa(I-II)} = M_I \cap M_{II} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix}$$

上述子并联机构和支链 III 可以构成第二个回路,由式(3)得其独立位移方程数为

$$\xi_{L2} = \dim. \{ M_{Pa(I-II)} \cup M_{III} \} = \dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

机构的自由度,由式(4)得

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = (9+6) - (6+6) = 3$$

因此,机构的自由度为 3,取  $P_{22}$ ,  $P_{32}$  和静平台上的转动副  $R_{11}$  为主动副。

### 1.2.3 耦合度计算

1) 约束度及耦合度定义

由基于单开链(SOC)的机构组成原理知,机构可分解为一系列单开链,第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{Lj} \quad (5)$$

式中:  $m_j$  为第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的运动副数;  $I_j$  为第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的驱动副数。

进一步,一组有序的  $v$  个 SOC 可划分成一个最小子运动链(Sub Kinematics Chain, SKC),它仅含一个零自由度 BKC(Basic Kinematics Chain),而对一个 BKC 而言,须

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0$$

因此,耦合度为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\}_{\min} \quad (6)$$

式中  $\left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\}_{\min}$  表示 SKC 分解为  $v$  个 SOC( $\Delta_j$ ),可有多种分配方案,取  $(\sum |\Delta_j|)$  的最小者。

2) 耦合度计算

由 1.2.2 节可知,  $\xi_{L1} = \xi_{L2} = 6$ , 因此,由式(5)计算它们的约束度分别为:

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = (3+6) - 2 - 6 = 1$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 6 = -1$$

由式(6)得耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (|1| + |-1|) = 1$$

因此,该机构仅包含一个 SKC,其位置正解可用一维搜索法求解。

## 2 位置正解分析

### 2.1 坐标系的建立和参数标注

如图 2 所示,  $A_1$ ,  $A_2$  和  $A_3$  分别为 3 边中点,取静平台 0 的几何中心为原点  $O$ ,  $Y$  轴水平右,  $X$  轴垂直于  $Y$  轴向下,  $Z$  轴由右手法则确定。同上,在动平台 1 上建立  $O'-X'Y'Z'$  坐标系。

设静平台 0 的内切圆半径为  $a$ , 动平台的边长为  $l_2$ , 平行四边形短杆的长度为  $l_1$ , 长杆长度为  $l_3$ ,  $A_2B_2=l_a$ ,  $A_3B_3=l_b$ 。  $A_1B_1$  与  $Y$  轴负方向的夹角为  $\theta$ ;  $B_1C_1$  与  $Y$  轴正方向的夹角为虚拟变量  $\delta$ 。

设动平台  $O'$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 动平台绕  $R_{13}$  副的转动为动平台的姿态角  $\alpha$ , 并且,  $\alpha$  以  $Z$  轴正方向为正。

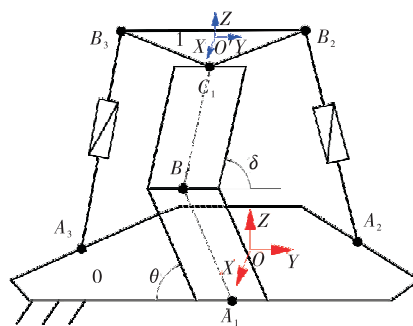


图 2 2T1R 机构的运动建模

Fig.2 Kinematic modeling of 2T1R mechanism

已知: 输入  $\theta, l_a, l_b$ , 求:  $O'$  的坐标  $(x, y, z)$  和

姿态角  $\alpha$ 。在静坐标系  $O$ -XYZ 中, 易知,  $A_1, A_2, A_3$  和  $B_1$  各点坐标分别为:  $(a, 0, 0)$ ;  $(-a/2, \sqrt{3}a/2, 0)$ ;  $(-a/2, -\sqrt{3}a/2, 0)$ ;  $(a, -l_3 \cos \theta, l_3 \sin \theta)$ 。

### 2.2.1 约束度为正 ( $\Delta_1=1$ ) 的第一回路的位置求解

在第一回路  $A_1-B_1-C_1-B_2-A_2$  上, 易知

$$\begin{bmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \\ z_{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -l_3 \cos \theta + l_3 \cos \delta \\ l_3 \sin \theta + l_3 \sin \delta \end{bmatrix}$$

同时, 可计算得点  $O'$  的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \sqrt{3} l_2 \cos \alpha / 3 \\ -l_3 \cos \theta + l_3 \cos \delta \\ l_3 \sin \theta + l_3 \sin \delta + \sqrt{3} l_2 \sin \alpha / 3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

进一步, 点  $B_2$  的坐标用  $O'$  点的坐标表示为

$$\begin{bmatrix} x_{B_2} \\ y_{B_2} \\ z_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \sqrt{3} l_2 \cos \alpha / 6 \\ y + l_2 / 2 \\ z + \sqrt{3} l_2 \sin \alpha / 2 \end{bmatrix}$$

由几何约束条件  $A_2B_2=l_a$ , 整理化简得

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha + C = 0$$

则

$$\alpha = 2 \arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \quad (8)$$

式中:  $A = \sqrt{3} l_2 (l_3 \sin \theta + l_3 \sin \alpha)$ ;  $B = -3\sqrt{3} a l_2 / 2$ ;  $C = 9a^2 / 4 + 3l_2^2 / 4 + A_1 + A_2 - l_a^2$ 。

显然,  $\alpha$  也是虚拟变量  $\delta$  的函数。

### 2.2.2 约束度为负 ( $\Delta_2=-1$ ) 的第二回路的位置求解

同样, 可求得点  $B_3$  的坐标(用  $O'$  点的坐标表示)为

$$\begin{bmatrix} x_{B_3} \\ y_{B_3} \\ z_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \sqrt{3} l_2 \cos \alpha / 6 \\ y - l_2 / 2 \\ z + \sqrt{3} l_2 \sin \alpha / 2 \end{bmatrix}$$

在  $A_3-B_3$  回路上, 由几何约束条件  $A_3B_3=l_b$ , 建立位置约束方程为

$$F(\delta) = (x_{B_3} - x_{A_3})^2 + (y_{B_3} - y_{A_3})^2 + (z_{B_3} - z_{A_3})^2 - l_b^2 = 0 \quad (9)$$

运用 Matlab,通过一维搜索可得到  $\delta$  的值,再将其代入式(7)和式(8),由此求得该机构的位置正解。

### 2.3 位置逆解求解

已知: $O'$ 的坐标 $(x, y, z)$ 和姿态角 $\alpha$ ,求输入 $\theta, l_a, l_b$ 。

由杆长约束  $B_1C_1 = l_3$ ,建立位置约束方程,整理得:

$$D \sin \theta + E \cos \theta + F = 0$$

$$\theta = 2 \arctan \frac{D \pm \sqrt{D^2 + E^2 - F^2}}{E - F}$$

式中: $D = -2l_3(z - \sqrt{3}l_2 \sin \alpha / 3)$ ;  $E = 2yl_3$ ;  $F = y^2 + (z - \sqrt{3}l_2 \sin \alpha / 3)^2$ 。

正逆解验证:设机构参数  $a = 256$  mm,  $l_1 = 80$  mm,  $l_2 = 300$  mm,  $l_3 = 220$  mm。取一组输入角数据: $\theta = 150^\circ$ ,  $l_a = 420$  mm,  $l_b = 430$  mm。由 Matlab 计算得机构位置正解,见表 1。取表 1 中 No.1 的正解数值,得到  $\theta, l_a, l_b$  的两组逆解数值,见表 2。

表 2 中 No.1 组逆解数据,和正解求解时采用的一组输入 $(\theta, l_a, l_b)$ 一致,因此,正逆解公式导出正确。

表 1 位置正解数值

Table 1 Positive solution value of mechanism position				
No.	$x/\text{mm}$	$y/\text{mm}$	$z/\text{mm}$	$\alpha/(\circ)$
1	108.283	28.333	342.546	28.974
2	278.266	24.586	86.420	-96.119

表 2 位置逆解数值

Table 2 Inverse solution value of mechanism position			
No.	$\theta/(\circ)$	$l_a/\text{mm}$	$l_b/\text{mm}$
1	150.000	419.998	429.998
2	42.505	419.998	429.998

## 3 建立刚度模型

### 3.1 基于虚拟弹簧法的刚度建模

虚拟弹簧法将杆件视为刚体,并虚设柔性关节,利用多自由度虚拟弹簧来描述杆件在空间中多维弹性变形(扭转变形、弯曲变形和拉伸变形),并研究了杆件的拉伸/旋转变形之间的耦合特性。此外,该方法只需确定连杆的材料和截面参数,无论此时机构是否处于奇异位置,均可通过运动学逆解方程求解机构的刚度矩阵,适用性广。

#### 3.1.1 支链运动方程

动平台上施加外部力和力矩后,动平台位姿会产生微小变化  $\delta t$ ,其可分为驱动副变形( $\delta \theta_a$ )、杆件变形( $\delta \theta_i$ )和被动副变形( $\delta \psi_a$ ),由此建立微分表达式

$$\delta t^i = J_\theta^i \delta \theta^i + J_\psi^i \delta \psi^i \quad (10)$$

式中: $\delta t^i = [\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z, \delta f_x, \delta f_y, \delta f_z]^T$  为支链末端的微分运动; $\delta \theta^i = [\delta \theta_1^i, \delta \theta_2^i, \dots, \delta \theta_n^i]^T$  为虚拟弹簧的微分运动; $\delta \psi^i = [\delta \psi_1^i, \delta \psi_2^i, \dots, \delta \psi_n^i]^T$  为被动副的微分运动; $J_\theta^i$  为弹簧变化与末端微分运动的映射; $J_\psi^i$  为被动副末端微分运动与末端微分运动的映射。

#### 3.1.2 静力学方程

假设在机构动平台施加外力与力矩  $f_i$ ,在支链中,被动副受力时产生受迫运动而达到新的静力平衡,即在静力平衡状态下,被动副不受力,只存在弹簧受力为  $\tau_\theta^i$ ,根据虚功原理得

$$f_i^T \delta t^i = \tau_\theta^i \delta \theta^i \quad (11)$$

式中:  $f_i = [f_x, f_y, f_z, M_x, M_y, M_z]^T$ ;  $\tau_{\theta}^i = [\tau_{\theta 1}^i, \tau_{\theta 2}^i, \dots, \tau_{\theta m}^i]^T$ 。

将式(10)代入式(11),并且被动副不受力,得

$$J_{\theta}^{iT} f_i = \tau_{\theta}^i \quad (12)$$

弹簧受力  $\tau_{\theta}^i$  又可以表示为  $K_{\theta} \delta \theta^i$ , 得

$$\delta \theta^i = K_{\theta}^{-1} J_{\theta}^{iT} f_i \quad (13)$$

将式(13)代入式(10),并与  $J_{\psi}^i f_i = 0$  联立,得到基于虚拟弹簧法的动态静力方程

$$\begin{bmatrix} f_i \\ \delta \psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta}^i & J_{\psi}^i \\ J_{\psi}^{iT} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \delta t^i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中  $S_{\theta}^i = J_{\theta}^i K_{\theta}^{-1} J_{\theta}^{iT}$ , 类比  $f_i = K^i \delta t^i$ , 将式(14)简化为

$$\begin{bmatrix} f_i \\ \delta \psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta t^i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中  $K_i$  即是支链的刚度矩阵。

由机构的受力与变形的关系可知,机构刚度不仅受机构的位姿影响,也与外力(矩)的作用位置有关。若将一个具有  $n$  条支链的机构末端点的受力  $F$  分解到每条支链上则有  $F = \sum_{i=1}^n f_i$ 。

由式(14)可得机构整体刚度矩阵为

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (16)$$

### 3.2 机构参数

机构各连杆的参数见表3,其中构成移动副的两根杆杆长均为300 mm,一根为直径20 mm的实心圆管,另一根为内外直径分别为20,30 mm的空心圆管。考虑到机构的强度和重量,机构各构件均选用碳纤维材料。机构各个输入采用相同的驱动电机,其驱动刚度由实验测得,此处取刚度为  $5 \times 10^4$  (N·m)/rad。

表3 机构杆件参数

参数	杆长/mm	直径/mm	弹性模量/MPa
$a$	256		
$l_1$	80	20	$2.1 \times 10^5$
$l_2$	300		
$l_3$	200		

### 3.3 支链 I 的刚度矩阵

建立支链 I:  $\{-P^{(4R)}-P^{(4R)}-R_{13}-\}$  的刚度矩阵,其虚拟弹簧模型如图3所示。其中,1-dof 虚拟弹簧表示驱动副  $R$  在其转动方向的扭转角变形;5-dof 虚拟弹簧表示平行四边形在笛卡尔空间中5自由度的弹性变形。混合支链 I 的局部坐标系标注,如图4所示。

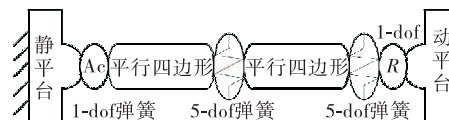


图3 支链 I 的虚拟弹簧模型

Fig.3 Virtual spring model of branch I

由式(14)和式(15)得支链 I 的静力方程为

$$\begin{bmatrix} f_A \\ 0_{(2 \times 2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\theta}^A \cdot K_{\theta}^{A-1} \cdot (J_{\theta}^A)^T & J_{\psi}^A \\ (J_{\psi}^A)^T & 0_{(2 \times 2)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \$_{d1} \\ 0_{(2 \times 2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^A & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \$_{d1} \\ 0_{(2 \times 2)} \end{bmatrix}$$

式中:  $K^A$  为支链 I 的刚度矩阵,  $K^A = \text{diag}[K_{ac}^A \quad K_{rod1} \quad K_{a1} \quad K_{rod2} \quad K_{a2}^A]$ ;  $K_{ac}^A$  为驱动刚度;  $K_{rodi}$  ( $i=1$ ,

2) 为平行四边形矩阵刚度;  $J_{\theta}^A = [\hat{\$}_{\theta a}^1, \hat{\$}_{\theta 1}^1, \dots, \hat{\$}_{\theta 10}^1]$ ;  $J_{\psi}^A = [\hat{\$}_{\psi 1}^A]$  为刚度旋量。

用 Matlab 软件,可求得混合支链 I 所在工作空间的刚度分布,如图5所示。

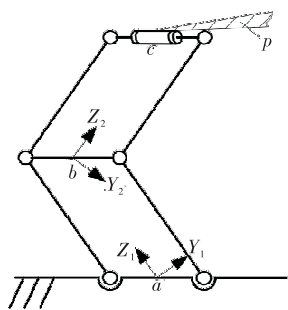


图4 混合支链 I 的局部坐标系标注

Fig.4 Local coordinate system annotation of mixed branch chain I

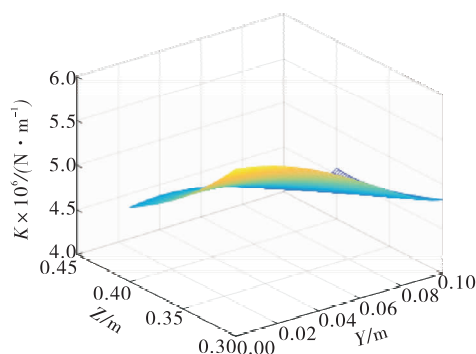


图5 支链 I 的刚度分布图

Fig.5 Rigidity distribution of branch chain I

### 3.4 支链 II, III 的刚度矩阵及总刚度

建立简单支链 II 的刚度矩阵,其虚拟弹簧模型如图 6 所示。其中,1-dof 虚拟弹簧表示驱动副  $P$  的弹性变形;6-dof 虚拟弹簧表示单杆在笛卡尔空间中的弹性变形,4-dof 虚拟弹簧表示导轨的弹性变形。支链 II 的局部坐标系标注如图 7 所示。

由式(14)和式(15)得支链 II 的静力方程为

$$\begin{bmatrix} f_B \\ 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\theta^B \times K_\theta^{B-1} \times (J_\theta^A)^T & J_\psi^4 \\ (J_\psi^A)^T & 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \$_{d2} \\ 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^B & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \$_{d2} \\ 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix}$$

式中:  $K^B$  为支链 II 的刚度矩阵;  $K_\theta^B = \text{diag}[K_{a1} \ K_{ac}^B \ K_{rod1} \ K_{dg} \ K_{rod2} \ K_{a2}]$ ;  $K_{ac}^B$  为驱动刚度;  $K_{rod i}$  ( $i=1,2$ ) 为单杆刚度矩阵;  $K_{dg}$  为移动导轨的刚度矩阵;  $J_\theta^B = [\hat{\$}_{\theta a}^2, \hat{\$}_{\theta 1}^2, \dots, \hat{\$}_{\theta 16}^2]$ ;  $J_\psi^B = [\hat{\$}_{\psi 1}^B, \dots, \hat{\$}_{\psi 5}^B]$  为刚度旋量。

用 Matlab 软件,可求得支链 II 所在工作空间的刚度分布,如图 8 所示。

同理,由式(14)和式(15)得支链 III 的静力方程为

$$\begin{bmatrix} f_C \\ 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\theta^C \times K_\theta^{C-1} \times (J_\theta^A)^T & J_\psi^4 \\ (J_\psi^A)^T & 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \$_{d3} \\ 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^C & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \$_{d3} \\ 0_{(5 \times 5)} \end{bmatrix}$$

式中:  $K^C$  为支链 III 的刚度矩阵;  $K_\theta^C = \text{diag}[K_{a1} \ K_{ac}^C \ K_{rod1} \ K_{dg} \ K_{rod2} \ K_{a2}]$ ;  $K_{ac}^C$  为驱动刚度;  $K_{rod i}$  ( $i=1,2$ ) 为单杆刚度矩阵;  $K_{dg}$  为移动导轨的刚度矩阵;  $J_\theta^C = [\hat{\$}_{\theta a}^3, \hat{\$}_{\theta 1}^3, \dots, \hat{\$}_{\theta 16}^3]$ ;

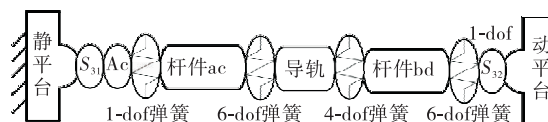


图6 支链 II 的虚拟弹簧模型

Fig.6 Virtual spring model of branch II

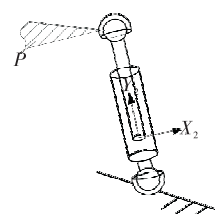


图7 支链 II 的局部坐标系标注

Fig.7 Local coordinate system annotation of branch II

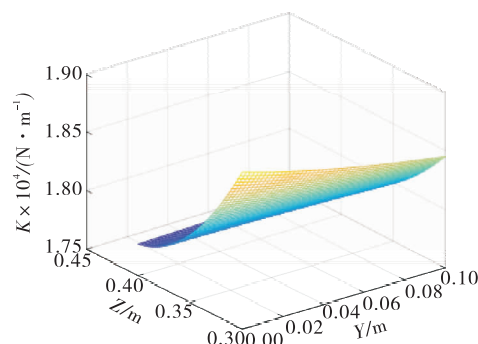


图8 支链 II 的刚度分布图

Fig.8 Rigidity distribution of branch chain II



$J_{\psi}^C = [\hat{\$}_{\psi_1}^C, \dots, \hat{\$}_{\psi_5}^C]$  为刚度旋量。

用 Matlab 软件,可求得支链Ⅲ所在工作空间的刚度分布,如图 9 所示。由式(16),通过 Matlab 可以求出机构的总体刚度,如图 10 所示。

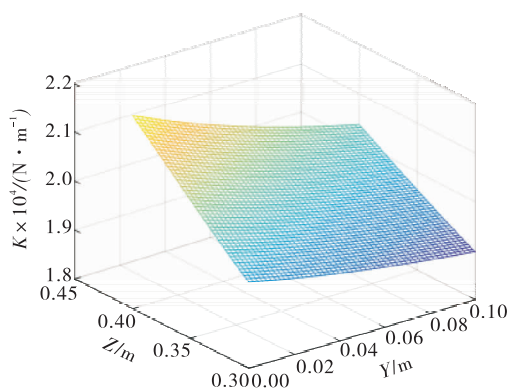


图 9 支链Ⅲ的刚度分布图

Fig.9 Rigidity distribution of branch chain III

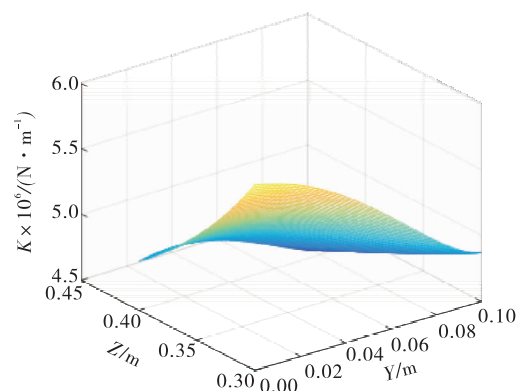


图 10 2T1R 机构总刚度分布图

Fig.10 Total stiffness distribution of 2T1R mechanism

### 3.5 刚度分析

根据刚度建模,可以得到机构整体的笛卡尔空间刚度矩阵  $\mathbf{K}_{(6 \times 6)}$ ,在这个  $6 \times 6$  的矩阵中,主对角线前 3 项分别表示  $X, Y, Z$  方向的扭转刚度,  $(\text{N} \cdot \text{m})/\text{rad}$ ;而后 3 项分别对应各方向的线性刚度,  $\text{N}/\text{m}$ 。

为了分析机构刚度特性在工作空间中的变化趋势,现对刚度矩阵中主对角线上的元素求平均值,由于扭转刚度和线性刚度的量纲不一致,且在数值大小上有一定差距,所以将两者分开考虑,为:

$$\eta_1 = (K_{11} + K_{22} + K_{33})/3; \eta_2 = (K_{44} + K_{55} + K_{66})/3$$

利用 Matlab 软件导出  $\eta_1$  和  $\eta_2$  的值在工作空间中的分布,如图 11、图 12 所示。

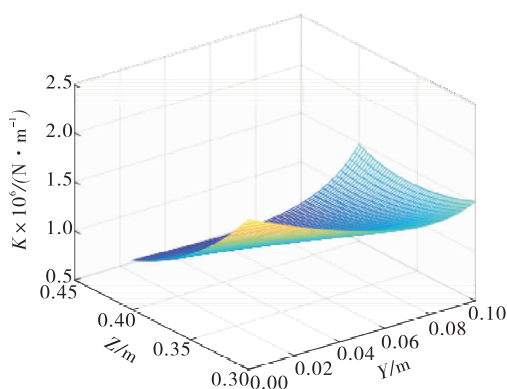


图 11 2T1R 机构的扭转刚度分布图

Fig.11 Torsional stiffness distribution of 2T1R mechanism

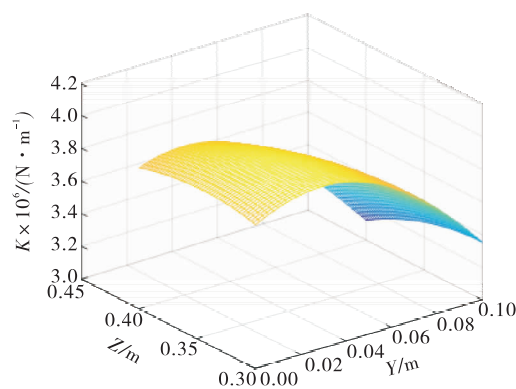


图 12 2T1R 机构的线刚度分布图

Fig.12 Line stiffness distribution of 2T1R mechanism

由图 10 可知,该机构的总刚度在工作空间内变化平稳,说明机构整体刚度性能较为均衡,并且,该机构的总刚度数值较大,可以承受较大载荷。由图 11、图 12 可知,从扭转刚度来看,该机构动平台在  $Y$  方向上刚度变化较小,在  $Z$  方向上,其刚度性能变化较为明显,在动平台距离静平台越近时(即  $Z$  值越小),扭转刚度处于上升趋势;从线性刚度来看,其数值变化较小,无突变现象。

## 4 结 论

1)根据方位特征集(POC)理论的并联机构拓扑设计理论和方法,文中提出了一种新型低耦合度两平移—转动并联机构,表明该机构的 POC、自由度、耦合度和刚度等重要拓扑结构特性,并给出了该机构运动位置的求解方法。

2)基于机构的工作空间分析,反映出了笛卡尔空间刚度矩阵的分布,并通过 Matlab 得到了机构的刚度分布图,并表明该机构刚度稳定,拥有良好的刚度特性,具有实际应用价值。

3)平行四边形构件相比于单杆构件具有较好的刚度特性,支链 I 含有 2 个平行四边形机构,因此,该机构可以承受较大的外载荷。

## 参考文献:

- [1]CORRADINI C, FAUROUX J C, KRUT S, et al. Evaluation of a 4 degree of freedom parallel manipulator stiffness [C]. 天津: [出版者不详], 2004.
- [2]AVILES R, AJURIA G, HORMAZA V, et al. A procedure based on finite elements for the solution of nonlinear problems in the kinematic analysis of mechanisms[J]. Finite Elements in Analysis & Design, 1996, 22(4): 305-327.
- [3]LONG C, SNYMAN J, GROENWOLD A. Optimal dtructural design of a planar parallel platform for machining[J]. Applied Mathematical Modelling, 2003, 27(8): 581-609.
- [4]RIZK R, FAUROUX J, MUNTEANU M, et al. A comparative stiffness analysis of a reconfigurable parallel machine with three or four degrees of mobility[J]. Journal of Machine Engineering, 2006, 6(2): 45-55.
- [5]DEBLAISE D, HERNOT X, MAURINE P. A systematic analytical method for PKM stiffness matrix calculation[C]. Orlando:Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006.
- [6]ECORCHARD G, NEUGEBAUER R, MAURINE P. Elasto-geometrical modeling and calibration of redundantly actuated PKMs[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(5): 795-810.
- [7]VERTECHY R, PARENTI-CASTELLI V. Static and stiffness analyses of a class of over-constrained parallel manipulators with legs of type US and UPS[C]. Roma: Robotics and Automation, 2007.
- [8]MAJOU F, GOSSELIN C M, WENGER P, et al. Parametric stiffness analysis of the orthoglide[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(3): 296-311.
- [9]PASHKEVICH A, CHABLAT D, WENGER P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(5): 966-982.
- [10]陈超,金鹏,张彦斐,等. 一种新型 3-RPS 并联机构的刚度特性分析[J]. 制造业自动化, 2018, 40(7): 123-127.
- [11]WU G L, BAI S P, KEPLER J. Stiffness characterization of a 3-PPR planar parallel manipulator with actuation compliance[J]. Mechanical Engineering Science, 2015, 229(12): 2291-2302.
- [12]杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 52-121.

(责任编辑:谭晓荷)