第 33 卷 第 2 期 常州大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 2
2021 年 3 月 Journal of Changzhou University(Natural Science Edition) Mar. 2021

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2021.02.012

热纠缠态表象的建立及其在密度矩阵中的应用

任　刚,张文海

(淮南师范学院 电子工程学院,安徽 淮南 232038)

摘要:量子系统与热库之间存在量子纠缠,类比于双光子之间的纠缠,可以建立热纠缠态表象,从而便于计算和分析量子系统的热演化规律。首先根据热场动力学理论,引入虚希尔伯特空间后,使原有的希尔伯特空间扩大为 2 个。然后,在极高温状态下,推导出热真空态的显式形式,即$|0(\beta)\rangle=(1-e^{-\beta\omega})^{1/2}\exp(e^{-\beta\omega/2}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})|0,\tilde{0}\rangle$。接着,将平移算符作用于热真空态,得到热纠缠态表象的具体形式,即$|\eta\rangle=\left(-\frac{1}{2}|\eta|^{2}+\eta a^{\dagger}-\eta^{*}\tilde{a}^{\dagger}+a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\right)|0,\tilde{0}\rangle$。研究结果表明,在热纠缠态表象中可以直接得到任意量子态在热环境中的演化情况。取平移热态为实例,理论计算结果说明,低温条件下,平移热态演变为无热噪声的相干态。

关键词:热场动力学;配分函数;虚态矢;热纠缠态表象

中图分类号:O 431.2　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**2095-0411(2021)02-0088-05

Construction of Thermal Entanglement Representation and Its Application in Density Matrix

REN Gang, ZHANG Wenhai

(School of Electrical and Electronics Engineering, Huainan Normal University, Huainan 232038, China)

Abstract: There is quantum entanglement between quantum system and thermal reservoir. Analogous to entanglement between two photons, the appearance of thermal entangled states can be established. This method is convenient for calculating and analyzing the thermal evolution of quantum systems. Original Hilbert space is expanded to two Hilbert space according to the theory of thermal field dynamics and the virtual Hilbert space. Then, the explicit form of the thermal vacuum state is derived in the extremely high temperature state, i.e., $|0(\beta)\rangle=(1-e^{-\beta\omega})^{1/2}\exp(e^{-\beta\omega/2}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})|0,\tilde{0}\rangle$. To obtain the

收稿日期:2020-11-30。

基金项目:安徽省教育厅自然科学基金资助项目(KJ2019A0688);安徽省省级教研资助项目(2018mooc125)。

作者简介:任刚(1972—),男,山东德州人,博士,副教授。E-mail: renfeiyu@mail.ustc.edu.cn

引用本文:任刚,张文海. 热纠缠态表象的建立及其在密度矩阵中的应用[J]. 常州大学学报(自然科学版),2021,33(2):88-92.

specific form of the thermal entangled state representation, translation operator is applied to the thermal vacuum state, i.e., $|\eta\rangle=\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a^{\dagger}-\eta^{*}\tilde{a}^{\dagger}+a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\right)|0,\tilde{0}\rangle$. These results show that the evolution of any quantum state in thermal environment can be directly obtained in thermal entangled state representation. Taking translational thermal state as an example, the theoretical calculation results show that translational thermal state evolves into coherent state without thermal noise under low temperature conditions.

Key words: thermal field dynamics; partition function; fictitious quantum state; thermal entanglement representation

实验室制备的大多数系统都与周围环境存在热交换，而周围的环境也可以看作是一个无限大的"热库"。从量子力学的角度来看，系统与热库的相互作用应包含系统的激发和"热库"能量释放两个过程[1-3]。因此，类似于光子的纠缠态[4]，系统与"热库"(环境)之间也应存在某种量子纠缠。

由于与环境纠缠的存在，一个初始量子态会随时间演化到任意时刻的末态[5]。目前，这种开放量子系统的动力学研究分为两种：一是马尔科夫近似；二是非马尔科夫情形[6-8]。在不同原子能级与多模场的相互作用模型下，通过数值模拟的方法，可以研究系统演化的量子速度极限[9-10]。

在热场动力学理论中，梅泽等[11]提出了任意力学量 F 在有限温度下的统计平均可表示为

$$\langle F\rangle=Z^{-1}(\beta)Tr(F\mathrm{e}^{-\beta H})\tag{1}$$

式中：$Z(\beta)=Tr\mathrm{e}^{-\beta H}$ 为系综的配分函数；T 为系统的热力学温度；H 为哈密顿量；$\beta=\frac{1}{kT}$，其中 $k=1.38\times10^{-23}$ J/K，为玻尔兹曼常数。

通过引入一个与温度有关的纯态 $|0(\beta)\rangle$，式(1)可以改写为

$$\langle F\rangle=\langle 0(\beta)|F|0(\beta)\rangle\tag{2}$$

为得到 $|0(\beta)\rangle$ 的具体形式，可将其在 Fock 空间展开为

$$|0(\beta)\rangle=\sum_n g_n(\beta)|n\rangle\tag{3}$$

将式(3)代入式(2)后，得

$$\langle F\rangle=\sum_{m,n}\langle m|g_m^{*}(\beta)Fg_n(\beta)|n\rangle\tag{4}$$

根据 $H|n\rangle=E_n|n\rangle$，式(1)可得

$$\langle F\rangle=Z^{-1}(\beta)\sum_{m,n}\langle m|F\mathrm{e}^{-\beta H}|n\rangle=Z^{-1}(\beta)\sum_{m,n}F\mathrm{e}^{-\beta E_n}\delta_{m,n}\tag{5}$$

对比式(4)与式(5)，$g_n(\beta)$ 满足

$$g_m{}^{*}(\beta)g_n(\beta)=Z^{-1}(\beta)\mathrm{e}^{-\beta E_n}\delta_{m,n}\tag{6}$$

式(3)虽然给出了热真空态的无限求和形式，但在理论分析和实际应用中，很难用其研究量子态在外界热环境中的演化。为了便于分析系综与环境的相互作用，可以引入虚拟的希尔伯特空间，从而得到热真空态的显式形式。本文还将进一步在热真空态的基础上，给出热纠缠态表象，并讨论一些常见系综的密度矩阵在热纠缠表象中的表达形式。

1　热真空态

根据量子态的正交性质，虚模希尔伯特空间的基矢也是分立正交的，即 $\langle\tilde{n}|\tilde{m}\rangle=\delta_{m,n}$。如果取

$$g_n(\beta)=Z^{-1/2}\mathrm{e}^{-\beta E_n/2}|\tilde{n}\rangle\tag{7}$$

则式(6)在双模空间可改写为

$$g_{n^*}(\beta)g_m(\beta)=Z^{-1}(\beta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta(E_n+E_m)}\langle\tilde{n}|\tilde{m}\rangle=Z^{-1}(\beta)\mathrm{e}^{-\beta E_n}\delta_{n,m} \tag{8}$$

式中上标“～”的物理量表示虚模。

将式(7)代入式(3),得任意哈密顿量下的热真空态

$$|0(\beta)\rangle=Z^{-1/2}(\beta)\sum_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta E_n}|n,\tilde{n}\rangle \tag{9}$$

自由玻色子系统的配分函数为 $Z(\beta)=(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})^{-1}$,哈密顿量为 $H=\omega a^\dagger a$,其本征态和虚态矢分别为 $|n\rangle=\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 和 $|\tilde{n}\rangle=\frac{\tilde{a}^\dagger}{\sqrt{n!}}|\tilde{0}\rangle$,则其对应的热真空态为

$$|0(\beta)\rangle=(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})^{1/2}\exp(\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0,\tilde{0}\rangle \tag{10}$$

式中 $\tilde{a}^\dagger$ 是虚模粒子数态的产生算符,是对热库中的粒子进行操作,与系综无关,满足 $[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger]=1$, $[a,\tilde{a}^\dagger]=0$, $\tilde{a}|0\rangle=0$。

2　热纠缠态表象

在高温环境下,即 $T\to\infty$,可知 $\beta=\frac{1}{kT}\to 0$,所以由式(10)可得,热真空态极限

$$|I\rangle\equiv|0(\beta)\rangle|_{T\to\infty}=\exp(a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0,\tilde{0}\rangle \tag{11}$$

将平移算符 $D(\eta)=\exp(\eta a^\dagger-\eta^* a)$ 作用于式(11),得到

$$\begin{aligned}|\eta\rangle&=D(\eta)|I\rangle=D(\eta)\exp(a^\dagger\tilde{a}^\dagger)D^{-1}(\eta)D(\eta)|0,\tilde{0}\rangle=\\&\exp[(a^\dagger-\eta^*)\tilde{a}^\dagger]\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a^\dagger\right)|0,\tilde{0}\rangle=\\&\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a^\dagger-\eta^*\tilde{a}^\dagger+a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right)|0,\tilde{0}\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

其中利用了 $D(\eta)a^\dagger D^{-1}(\eta)=a^\dagger-\eta^*$ 和 $D(\eta)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\eta|^2}\mathrm{e}^{\eta a^\dagger}\mathrm{e}^{\eta^* a}$ 。

对比文献[12]中的双模光场纠缠态,这里的 $|\eta\rangle$ 表象反映了系综与环境由于热交换而存在的某种纠缠,因此称之为热纠缠态表象。

3　密度矩阵在热纠缠态中的表示

在通过虚模的引入而扩大了的希尔伯特空间中,热纠缠表象是算符 $a-\tilde{a}^\dagger$ 与 $\tilde{a}-a^\dagger$ 的共同本征态[13-14],即

$$(a-\tilde{a}^\dagger)|\eta\rangle=\eta|\eta\rangle,\ (\tilde{a}-a^\dagger)|\eta\rangle=-\eta^*|\eta\rangle \tag{13}$$

在一般的希尔伯特空间,任意密度算符可以展开为

$$\rho=\sum_{n,m=0}\rho_{n,m}a^{\dagger m}a^n \tag{14}$$

将式(14)中密度算符作用于式(11),得到任意算符 F 的系综热平均

$$|\rho\rangle\equiv\rho|I\rangle=\sum_{n,m=0}\rho_{n,m}a^{\dagger m}\tilde{a}^{\dagger n}|I\rangle=\sum_{n,m=0}\rho_{n,m}\tilde{a}^{\dagger n}\tilde{a}^m|I\rangle=\sum_{n,m=0}(\rho^*_{n,m}\tilde{a}^{\dagger m}\tilde{a}^n)^\dagger|I\rangle \tag{15}$$

令 $\tilde{\rho}=\sum_{n,m=0}\rho^*_{n,m}\tilde{a}^{\dagger m}\tilde{a}^n$,则式(15)可写为

$$|\rho\rangle=\tilde{\rho}^\dagger|I\rangle \tag{16}$$

任意力学量算符 F 的系综热平均在扩大的希尔伯特空间可写成

$$\begin{aligned}\langle F\rangle = Tr(F\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n \mid F\rho \mid n\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty}\langle n \mid F\rho \mid m\rangle\delta_{n,m} = \\ \sum_{n,m=0}^{\infty}\langle n,\tilde{n} \mid F\rho \mid m,\tilde{m}\rangle = \langle I \mid F \mid \rho\rangle\end{aligned} \tag{17}$$

这里$|\rho\rangle$为包含虚模的双模纯态与单模空间不同。当ρ为真空纯态密度矩阵$|0\rangle\langle 0|$时,其双模空间形式为

$$|\rho\rangle = |0\rangle\langle 0| \sum_{n=0}^{\infty}|n,\tilde{n}\rangle = |0\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{n,0}|\tilde{n}\rangle = |0,\tilde{0}\rangle \tag{18}$$

对于平移热态,其密度矩阵为

$$\boldsymbol{\rho}_T = (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})D(\alpha)\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha) \tag{19}$$

利用热纠缠态表象,分析其在热环境中的演化情况。将式(19)投影到式(12),可得

$$\begin{aligned}\langle\eta \mid \boldsymbol{\rho}_T\rangle &= (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\langle\eta \mid D(\alpha)\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha) \mid I\rangle = \\ &(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\langle\eta \mid D(\alpha)\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha)\mathrm{e}^{\beta\omega a^\dagger a}\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a} \mid I\rangle = \\ &(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\langle\eta \mid D(\alpha)\tilde{D}(\alpha^*)\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a} \mid I\rangle = \\ &(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\mathrm{e}^{\alpha\eta^*-\alpha^*\eta}\langle\eta \mid \mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a} \mid I\rangle\end{aligned} \tag{20}$$

为了进一步计算右边的矩阵元,类似于双模压缩算符,可得

$$\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a} \mid I\rangle = \exp(\mathrm{e}^{-\beta\omega}a^\dagger\tilde{a}^\dagger) \mid 0,\tilde{0}\rangle = \cosh\lambda\int\frac{d^2\eta}{\mu\pi} \left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta \mid 0,\tilde{0}\rangle \tag{21}$$

式中

$$\mathrm{e}^{-\beta\omega} \equiv \tanh\lambda < 1,\ \mu = \sqrt{\frac{1+\tanh\lambda}{1-\tanh\lambda}} \tag{22}$$

根据式(21),可得

$$\begin{aligned}\langle\eta \mid \mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a} \mid I\rangle &= \cosh\lambda\int\frac{d^2\eta'}{\mu\pi}\left\langle\eta \,\middle|\, \frac{\eta'}{\mu}\right\rangle\langle\eta' \mid 0,\tilde{0}\rangle = \\ &\cosh\lambda\int\frac{d^2\eta'}{\mu\pi}\pi\delta^{(2)}\left(\eta-\frac{\eta'}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\eta'|^2} = \\ &\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}}\right)|\eta|^2\right]\end{aligned} \tag{23}$$

将式(23)代入式(20),得

$$\langle\eta \mid \boldsymbol{\rho}_T\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}}\right)|\eta|^2 + \alpha\eta^* - \alpha^*\eta\right] \tag{24}$$

由式(21)可见,平移热态在热纠缠态表象中呈现出类似高斯分布的形式。当系统处于极低温时,即$T\to 0$,可得平均粒子数

$$\bar{n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1} \to 0,\ \frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}} \to 0$$

此时式(24)变为

$$\langle\eta \mid \boldsymbol{\rho}_T\rangle|_{T\to 0} = \exp(\alpha\eta^* - \alpha^*\eta) \tag{25}$$

可见,低温条件下,平移热态可以看作是一个无热噪声的相干态。

4 结　论

通过引入虚模态矢,扩大了希尔伯特空间,从而得出对应任意哈密顿量的热真空态。当取一维谐振

子的哈密顿量时,可以得出其对应的热真空态。当环境温度极高时,此热真空态变为态矢 $|I\rangle$ 。将平移算符作用于此态矢,得到热纠缠态表象。利用热纠缠态表象,课题组给出了一般密度矩阵在热纠缠态表象中的表达式。最后,分析了平移热态的密度矩阵在热库环境下的演化情况。一个有趣的发现是,在极低温度下,平移热态衰减为无热噪声的相干态。通过研究发现,热纠缠态表象在研究系综与环境相互纠缠问题时,可以化繁为简,更加容易分析系综随温度的演化情况。

参考文献:

[1]邢贵超,夏云杰. 与热库耦合的光学腔内三原子间的纠缠动力学[J]. 物理学报,2018,67(7):34-40.

[2]卢道明. 原子与热库相互作用系统中的三体纠缠特性[J]. 光子学报,2017,46(2):145-153.

[3]任益充,范洪义. Ket-Bra 纠缠态方法研究含时外场中与热库耦合 Qubit 的演化[J]. 物理学报,2016,11:110301.

[4]杨阳,范洪义. 激光光场经历扩散通道后的温度演变[J]. 低温物理学报,2018,40(6):46-49.

[5]王帅,侯丽丽,陈宪锋. 光子扣除双模压缩相干态的压缩性质[J]. 常州大学学报(自然科学版),2016,28(3):88-91.

[6]王琼,贺志,余敏. 两能级系统耦合多个玻色热库中量子速度极限研究[J]. 量子电子学报,2019,36(5):598-604.

[7]盛扬,李帅,段宗权,等. Ag-In-Zn-S 四元量子点的制备及其表面修饰[J]. 常州大学学报(自然科学版),2019,31(6):39-45.

[8]黄雨梦,杨志远,谢燕青,等. 量子导引在结构化环境中退相干演化[J]. 云南大学学报(自然科学版),2019,41(2):291-297.

[9]冯海冉,李鹏,岳现房. 初态对线型分子体系量子速度极限度量的影响[J]. 物理学报,2019,68(5):1-6.

[10]宋洪婷. 量子非马尔科夫特性的度量与调控[J]. 控制理论与应用,2017,34(11):1477-1483.

[11]TAKAHASHI Y, UMEZAWA H. Thermo field dynamics[J]. Int J Mod Phys B, 1996, 10: 1755-1805.

[12]范洪义,李学超. 连续纠缠态表象的几种 Schmidt 分解、物理意义与应用[J]. 物理学报,2012,61(20):77-82.

[13]FAN H Y, FAN Y. New representation of thermal states in thermal field dynamics[J]. Phys Lett A, 1998, 246(314): 242-246.

[14]FAN H Y, LU H L. The mixed coherent state representation of the density operator in thermo-field dynamics[J]. Mod Phys Lett B, 2007, 21(4): 183-188.

(责任编辑:李艳)