

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2021.04.006

无参数忆阻系统的平面偏置控制共存分岔研究

张 希, 罗姣燕, 武花干, 包伯成

(常州大学 微电子与控制工程学院, 江苏 常州 213164)

摘要:初值依赖的超级多稳定性和偏置控制的共存吸引子近年来得到学者们的广泛关注。通过在三维线性耗散系统中引入 2 个具有正弦忆导的忆阻元件, 构建了一种新颖的、有着平面平衡点的五维忆阻动力学系统。借助理论分析和数值计算, 发现忆阻初值控制的平面共存分岔现象, 并揭示了忆阻初值依赖的超级多稳定性。设计了该忆阻动力学系统的模拟电路, 并由 PSIM 电路仿真验证了平面偏置控制的共存行为。

关键词:忆阻系统; 忆阻初值; 共存平面分岔; 超级多稳定性

中图分类号:O 41

文献标志码:A

文章编号:2095-0411(2021)04-0041-08

Plane Offset-Boosted Coexisting Bifurcations in No-Argument Memristive System

ZHANG Xi, LUO Jiaoyan, WU Huagan, BAO Bochong

(School of Microelectronics and Control Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract:Initial-dependent extreme multi-stability and offset-boosted coexisting attractors have been significantly concerned recently. This paper constructs a novel five-dimensional memristive dynamical system with plane equilibrium via introducing two memristors with sine memductance into a three-dimensional linear dissipative system. According to theoretical analyses and numerical plots, the memristor initial-boosted coexisting plane bifurcations are found and the memristor initial-dependent extreme multi-stability is revealed. Besides, an analog circuit is designed for the presented memristive dynamical system and PSIM circuit simulations validate the plane offset-boosted coexisting behaviors.

Key words: memristive system; memristor initial; coexisting plane bifurcations; extreme multi-stability

基于忆阻的混沌振荡电路和神经形态电路, 因体积小、功耗低而有着广泛的应用前景^[1-2]。对这类忆阻应用电路的动力学分析表明, 忆阻初值在这类电路的复杂动力学中起着特别重要的作用^[3-4]。通常

收稿日期:2020-12-08。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51607013)。

作者简介:张希(1985—), 男, 江苏泗洪人, 博士, 讲师。通信联系人:包伯成(1965—), E-mail: mervinbao@126.com

引用本文:张希, 罗姣燕, 武花干, 等. 无参数忆阻系统的平面偏置控制共存分岔研究[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2021, 33(4): 41-48.

情况下,基于理想忆阻的振荡电路具有无限多线或面平衡点^[5-6]、无平衡点^[7]、可切换的无平衡点和线平衡点^[8],极易产生无限多共存吸引子,从而产生初值依赖的超级多稳定性^[9-11]。因此,在已有的电路和系统中引入 1 个、2 个或多个理想忆阻是产生无限多共存吸引子的有效方法。相比之下,另一种生成无限多初值偏置控制吸引子的有效方法是在某些特定的、可偏置控制的混沌系统中引入周期三角函数^[12-16]。偏置控制与变量变换相关联,该变量变换使动力学系统的某个变量发生偏置,这样其相空间吸引子不会改变系统的解^[12]。若所有周期三角函数的周期相同,则可由周期偏置控制无限复制任意相空间吸引子^[14]。在这两种方法中,吸引子偏置控制行为都是通过改变初值来实现的。然而,基于理想忆阻的振荡电路通常具有完整的、随初值演化的分岔道路^[1],这使得这类电路产生更多吸引子类型。

受这两种方法的启发,提出了一种新颖的五维忆阻动力学系统,它通过在三维线性系统中引入 2 个具有正弦忆导的忆阻元件而得到的。虽然所提出的忆阻动力系统具有周期三角函数的形式,但非线性项是正弦函数与状态变量的乘积,这里的正弦函数可看作为由其他状态变量控制的 2 个可变系统参数。如预期的那样,在这样的忆阻动力系统中发现了与忆阻初值相关的分岔控制行为和无限多平面偏置控制的共存吸引子。实际上,将这两种方法结合起来,可以非常有效地实现初值偏置控制的平面共存分岔,并具有更为复杂的超级多稳定性。

1 具有面平衡点的忆阻系统

首先考虑 1 种具有正弦忆导的忆阻模型,其数学表达式为

$$\begin{cases} i = W(\varphi)v = \sin(\varphi)v \\ \dot{\varphi} = v \end{cases} \quad (1)$$

式中: v 为忆阻的输入电压; i 为输出电流。正弦忆导 $W(\varphi) = \sin(\varphi)$ 是周期变化且多值的。当端口施加双极性正弦电压激励时,该忆阻可呈现出紧磁滞回线特性。

基于式(1)描述的忆阻模型,容易构建出 1 种简单的双忆阻动力学系统,其数学表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 - 3.5x_2 \sin x_5 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 + 3.5x_1 \sin x_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 \\ \dot{x}_5 = x_2 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)是一个五维自治耗散系统,无任何可控参数。

显然,式(2)描述的忆阻系统有 1 个面平衡点,可表示为

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = \mu, x_5 = \eta\} \quad (3)$$

式中 μ 和 η 为 2 个不确定的任意常数。

可导出忆阻系统在面平衡点 S 邻域的雅克比矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 3.5\sin\eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 + 3.5\sin\mu & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

特征多项式方程为

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0 \quad (5)$$

式中: $a_1 = 1$; $a_2 = 1 - 3.5\sin\mu$; $a_3 = (1 - 3.5\sin\mu)(1 - 3.5\sin\eta)$ 。

式(5)说明雅克比矩阵(4)有2个零根和3个非零根。对于3个非零根,Routh-Hurwitz 稳定性判据为

$$a_1 > 0; a_3 > 0; a_1 a_2 - a_3 > 0 \quad (6)$$

若式(6)的3个条件都满足,则S是稳定的,系统轨迹形成点吸引子。否则,式(6)的任何1个条件不满足,则S是不稳定的,系统轨迹产生不稳定行为。

在式(6)中代入式(5)的非零根3次多项式方程系数,Routh-Hurwitz 稳定性判据改写为

$$\begin{cases} (1 - 3.5\sin\mu)(1 - 3.5\sin\eta) > 0 \\ \sin\eta(1 - 3.5\sin\mu) > 0 \end{cases} \quad (7)$$

在主值 $[-\pi, \pi]$ 范围内,可求得面平衡点S的稳定条件为

$$\begin{cases} -\pi < \mu < \arcsin \frac{1}{3.5} \text{ 或 } \pi - \arcsin \frac{1}{3.5} < \mu < \pi \\ 0 < \eta < \pi \end{cases} \quad (8)$$

由式(7),当 $\mu = 0$ 时,面平衡点S的稳定条件可简化为

$$0 < \sin\eta < \frac{1}{3.5} \quad (9)$$

可得到面平衡点S的稳定区域为

$$0 < \eta < \arcsin \frac{1}{3.5} \text{ 或 } \pi - \arcsin \frac{1}{3.5} < \eta < \pi \quad (10)$$

然而,当 $\eta = 0$ 时,面平衡点S只有临界稳定点,其临界稳定区域为

$$-\pi < \mu < \arcsin \frac{1}{3.5} \text{ 或 } \pi - \arcsin \frac{1}{3.5} < \mu < \pi \quad (11)$$

根据式(10)和式(11)所确定的稳定区域,在主值区域 $[-\pi, \pi]$ 内取若干忆阻初值 μ 和 η 的典型值,3个非零特征根及其稳定性类型汇总于表1。从表1可看出,不同忆阻初值所对应的3个非零特征根有Hopf分岔点、指数1鞍焦、指数2鞍焦、稳定结焦、不稳定鞍点和临界稳定鞍焦等多种稳定性类型,说明了在 μ - η 初值平面上有着复杂的稳定性分布,证明了新提出的忆阻系统存在极其依赖于2个忆阻初值的丰富动力学行为。

表1 在主值 $[-\pi, \pi]$ 范围内不同初值的非零特征根和稳定性类型

Table 1 Nonzero eigenvalues and stability types with different initial values in the range of principal value $[-\pi, \pi]$

μ, η	非零特征根	稳定性类型
0,0	$-1, \pm 1j$	Hopf分岔点
0,-0.3	$-1.362\ 2, 0.181\ 1 \pm 1.208\ 6j$	不稳定指数2鞍焦
0,0.2	$-0.401\ 0, -0.299\ 5 \pm 0.818\ 6j$	稳定结焦
0,0.3	$0.033\ 2, -0.516\ 6 \pm 0.876\ 0j$	不稳定指数1鞍焦
-0.5,0	$-1, \pm 1.636\ 5j$	临界稳定鞍焦
0.2,0	$-1, \pm 0.552\ 0j$	临界稳定鞍焦
0.5,0	$0.823\ 4, -0.823\ 4, -1$	不稳定鞍点

2 忆阻初值控制的平面共存分岔

设置系统初值为 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0)] = (10^{-9}, 0, 0, \mu, \eta)$,即非忆阻初值固定为 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = (10^{-9}, 0, 0)$,而忆阻初值 $[x_4(0), x_5(0)]$ 设置为可变参数 (μ, η) 。基于四阶龙格-库塔算法,采用时间步长0.01和时间区间 $[950, 1\ 000]$ 进行Matlab数值仿真。

首先,忆阻初值 η 分别设为 $2\pi - 0.3$, -0.3 和 $-2\pi - 0.3$,且忆阻初值 μ 在区域 $[-2\pi, 2\pi]$ 内变化。可仿真得到状态变量 x_5 的最大值分岔图如图1(a)所示,其中深绿色、黑色和品红色轨迹分别对应于分别从 $\eta = 2\pi - 0.3$, $\eta = -0.3$ 和 $\eta = -2\pi - 0.3$ 出发的轨迹。相应地, $\eta = -0.3$ 时 μ 变化的前4根李雅普

诺夫指数谱如图 1(b)所示。其次, μ 分别设为 $2\pi+0.5, 0.5$ 和 $-2\pi+0.5$, 且 η 在区域 $[-2\pi, 2\pi]$ 内改变。可仿真得到 x_4 的最大值分岔图如图 2(a)所示, 其中蓝色、棕色和红色轨迹分别对应于分别从 $\mu = 2\pi+0.5, 0.5$ 和 $-2\pi+0.5$ 出发的轨迹。相应地, $\mu = 0.5$ 时 η 变化的前 4 根李雅普诺夫指数谱如图 2(b)所示。图 1 和图 2 中最大值分岔图与李雅普诺夫指数谱所刻画的动力学是完全一致的。需指出的是, 稳定点吸引子轨道只有 1 根零值李雅普诺夫指数, 而混沌和周期轨道总是有 3 根零值李雅普诺夫指数。

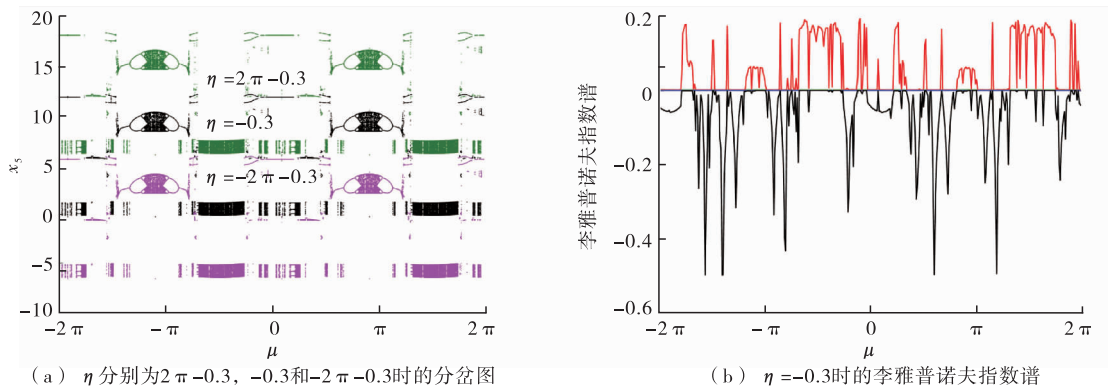


图 1 沿着 x_5 轴的平面偏置控制分岔行为

Fig.1 Plane offset-boosted coexisting bifurcation behaviors along x_5 axis

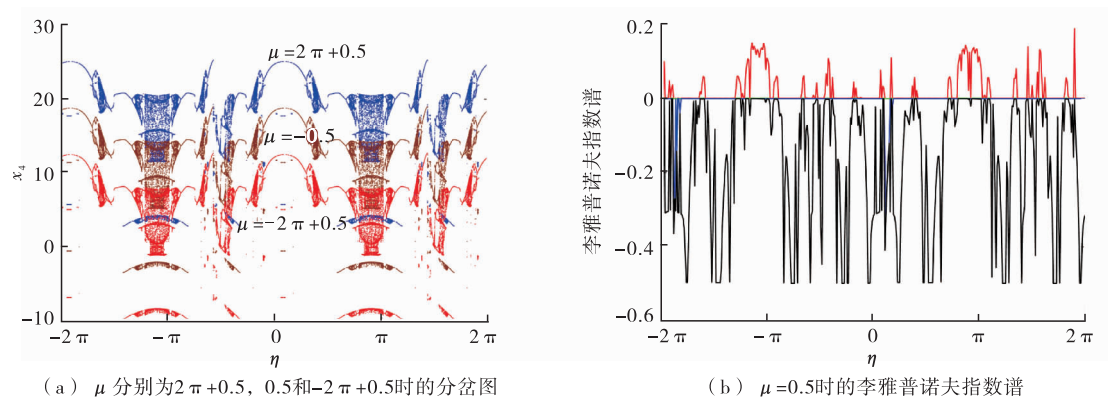


图 2 沿着 x_4 轴的平面偏置控制分岔行为

Fig.2 Plane offset-boosted coexisting bifurcation behaviors along x_4 axis

观察图 1 和图 2, 可以发现具有正/反向倍周期分岔路由的混沌、周期和点等行为以及反单调性, 恰好反映了超级多稳定性出现, 即无限多吸引子的共存。特别是, 在 $x_4 \times x_5$ 维度上, 该忆阻系统存在相同分岔结构的平面共存分岔, 它是由忆阻初值周期变化所引起的, 其循环宽度和高度均为 2π , 有别于文献 [12-16] 中所报道的偏置控制行为。

系统(2)在 $x_4 \times x_5$ 维度上的忆阻初值偏置控制行为可由在 x_4 - x_5 平面上的相轨图来刻画, 如图 3 所示。其中紫色代表 $(m, n) = (0, 0)$ 、青色代表 $(m, n) = (0, 1)$ 、红色代表 $(m, n) = (1, 0)$ 、蓝色代表 $(m, n) = (1, 1)$ 。图 3(a)给出了 $(\mu, \eta) = (2m\pi+3, 2n\pi-0.3)$ 时大幅度混沌吸引子和 $(\mu, \eta) = (2m\pi-1.5, 2n\pi-0.3)$ 时小幅度混沌吸引子的数值仿真结果; 图 3(b)给出了 $(\mu, \eta) = (2m\pi+2.5, 2n\pi-0.3)$ 时周期 4 极限环的数值仿真结果; 图 3(c)给出了 $(\mu, \eta) = (2m\pi+0.5, 2n\pi+3)$ 时大幅度混沌吸引子的数值仿真结果; 图 3(d)给出 $(\mu, \eta) = (2m\pi+0.5, 2n\pi+0.1)$ 时周期 1 极限环和 $(\mu, \eta) = (2m\pi+0.5, 2n\pi+0.4)$ 时点吸引子的数值仿真结果。图 3 揭示了 6 类忆阻初值偏置控制的共存吸引子, 包括 3 种不同拓扑结构的混沌吸引子、2 种不同拓扑结构和周期数的极限环和 1 种稳定点吸引子。

不难看出,这些吸引子在 $x_4 \times x_5$ 维度上的位置间距均为 2π 宽度或高度。当忆阻初值位置中的 m 和 n 趋向无穷时,该忆阻系统会显现出无限多共存吸引子,即超级多稳定性。

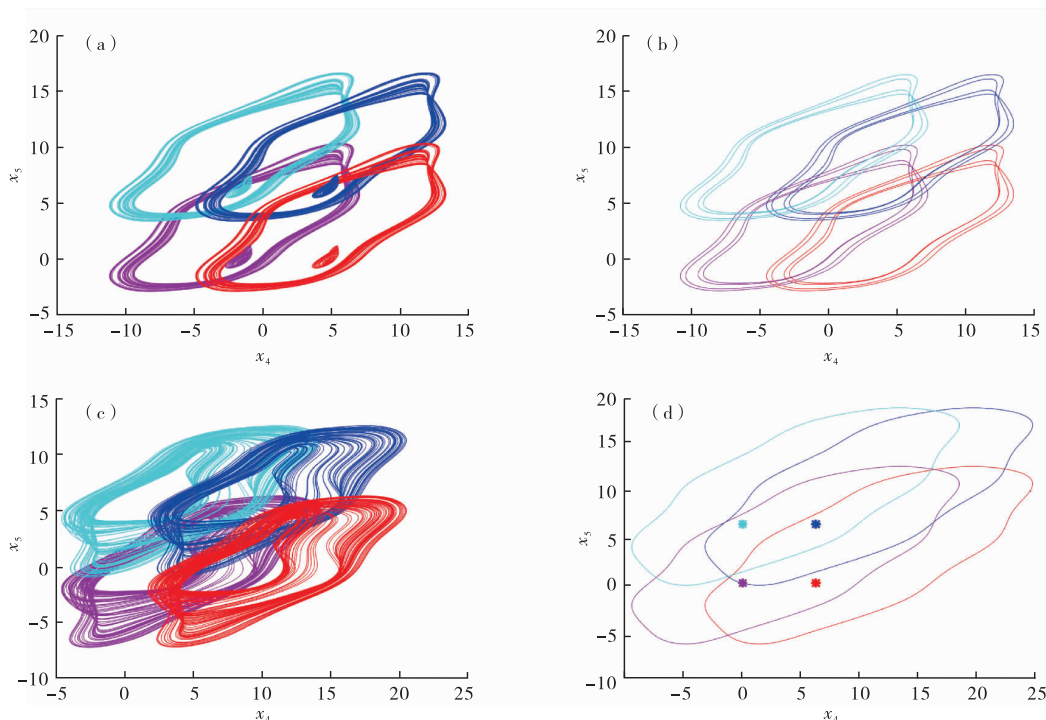
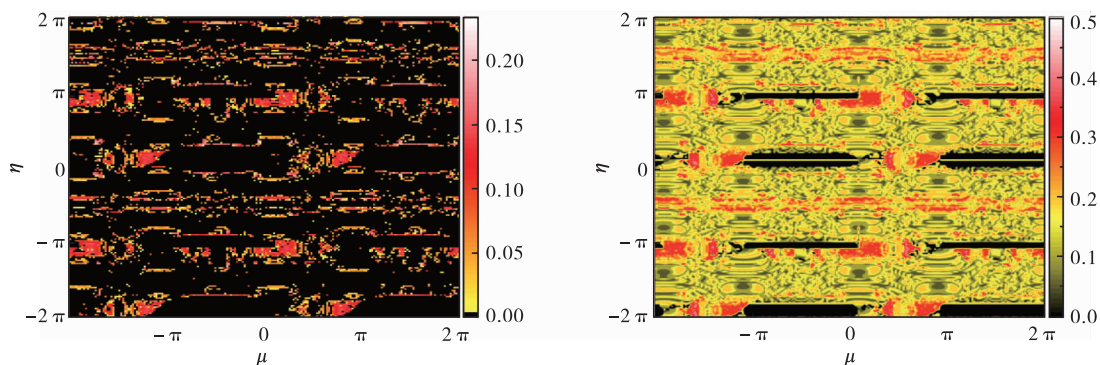


图3 分布在 x_4 - x_5 平面上忆阻初值偏置控制的共存吸引子

Fig.3 Memristor initial offset-boosted coexisting attractors in x_4 - x_5 plane

当2个忆阻初值 $[x_4(0), x_5(0)] = (\mu, \eta)$ 均在区域 $[-2\pi, 2\pi]$ 内连续改变时,由数值仿真可得到在 μ - η 平面上的动力学地图和复杂度谱分别如图4(a)和图4(b)所示。图4(a)的动力学地图是根据最大李雅普诺夫指数值用不同的颜色来刻画的^[8],其中黄-红-白色代表正值,该区域出发的运行轨迹是混沌的;而黑色代表零值,该区域出发的运行轨迹是周期或稳定点的。需说明的是,由于忆阻元件的引入,忆阻系统出现了零特征根,导致相应的零值李雅普诺夫指数出现,因此图4(a)的动力学地图无法区分周期和稳定点行为。图4(b)的复杂度谱则是基于傅里叶变换计算状态变量 x_2 序列的谱熵用颜色棒显现来获得的^[8]。不规则混沌序列有着相对大的复杂度值,规则的周期序列有着相对小的复杂度值,而稳定点的复杂度值则为0。



(a) 最大李雅普诺夫指数值刻画的动力学地图

(b) 状态变量 x_2 序列的基于谱熵的复杂度谱

图4 在 μ - η 初值平面上的二维动力学行为

Fig.4 Two dimensional dynamical behaviors on the initial plane of μ - η

图 4 数值仿真结果说明了忆阻系统在忆阻初值平面上存在复杂的动力学行为分布,且呈现以 2π 为周期的平面循环特性。在每个循环区域内可直观展现出各类吸引子,包括不同拓扑结构的混沌吸引子、不同周期数的极限环和不同位置的稳定点。因此,图 4 结果论证了忆阻系统可展现出忆阻初值依赖的超级稳定性现象,即无限多吸引子的共存现象。

3 基于电路实现的 PSIM 仿真

采用运算放大器、模拟乘法器、三角函数变换器、电容和电阻等元器件,可实现式(2)描述的忆阻系统。由于系统初值即电容电压在硬件实验中都是感应获得的,难以手工设置,因此这里运用 PSIM 仿真软件验证忆阻初值平面位移的共存吸引子。

图 5(a)显示了实现具有正弦忆导的忆阻模拟器模块,包含了积分器 U_1 (时间常数为 $\tau = RC$)、三角函数变换器 U_2 (可选用 AD639AD 芯片)、模拟乘法器 U_3 和输出电阻 R_0 。根据电路原理图,忆阻模拟器的数学模型为

$$\begin{cases} i_M = \frac{g}{R_k} v_M \sin v_\varphi \\ RC \frac{dv_\varphi}{dt} = v_M \end{cases} \quad (12)$$

式中: i_M, v_M 分别为忆阻模拟器的输出电流和输入电压; g 为模拟乘法器 U_3 的增益; v_φ 为积分器 U_1 的输出电压。

由图 5(a)的忆阻模拟器模块,图 5(b)给出了忆阻系统的实现电路,它仅含有 3 个积分器和 3 个反相器。

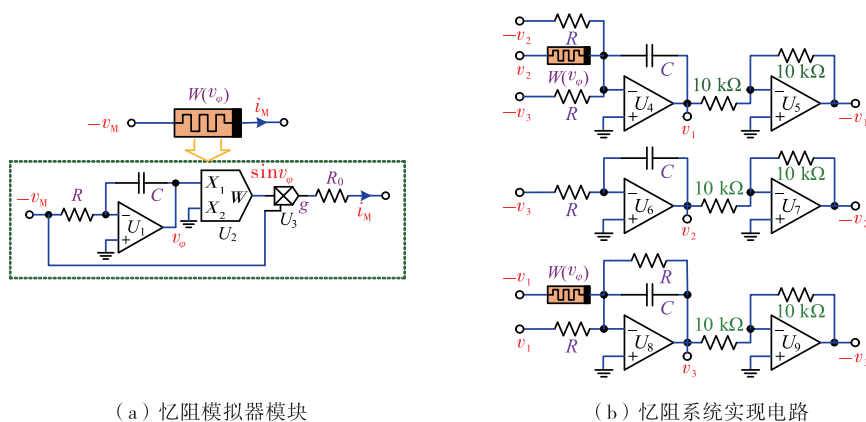


图 5 忆阻系统的电路实现

Fig.5 Circuit realization of memristor circuit

因此图 5 所示的实现电路的电路方程可表达为

$$\begin{cases} RC \frac{dv_1}{dt} = v_2 + v_3 - \frac{gR}{R_0} v_2 \sin v_5 \\ RC \frac{dv_2}{dt} = v_3 \\ RC \frac{dv_3}{dt} = -v_1 - v_3 + \frac{gR}{R_0} v_1 \sin v_4 \\ RC \frac{dv_4}{dt} = v_1 \\ RC \frac{dv_5}{dt} = v_2 \end{cases} \quad (13)$$

式中: v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 为对应于式(2)中状态变量的5个电路变量; RC 为5个积分器的时间常数。设 $\tau = RC = 35 \text{ k}\Omega \times 10 \text{ nF} = 350 \text{ }\mu\text{s}$ 且 $g = 1$, 则有 $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ 。

对应于图3所示的相轨图,由PSIM仿真可获得分布在 v_4 - v_5 平面上的忆阻初值偏置控制的共存吸引子,如图6所示,图中不同颜色所代表的 (m, n) 值与图3的一致。类似地,图6(a)给出了 $(\mu, \eta) = (2m\pi + 3, 2n\pi - 0.3)$ 时大幅度混沌吸引子和 $(\mu, \eta) = (2m\pi - 1.5, 2n\pi - 0.3)$ 时小幅度混沌吸引子的电路仿真结果;图6(b)给出 $(\mu, \eta) = (2m\pi + 2.5, 2n\pi - 0.3)$ 时周期4极限环的电路仿真结果;图6(c)给出了 $(\mu, \eta) = (2m\pi + 0.5, 2n\pi + 3)$ 时大幅度混沌吸引子的电路仿真结果;图6(d)给出 $(\mu, \eta) = (2m\pi + 0.5, 2n\pi + 0.1)$ 时周期1极限环和 $(\mu, \eta) = (2m\pi + 0.5, 2n\pi + 0.4)$ 时点吸引子的仿真结果。将图6结果与图3结果作比较,不难看到,PSIM电路仿真很好地验证了Matlab数值仿真,说明也可从忆阻动力学系统的物理电路中捕捉到平面偏置控制的共存行为。

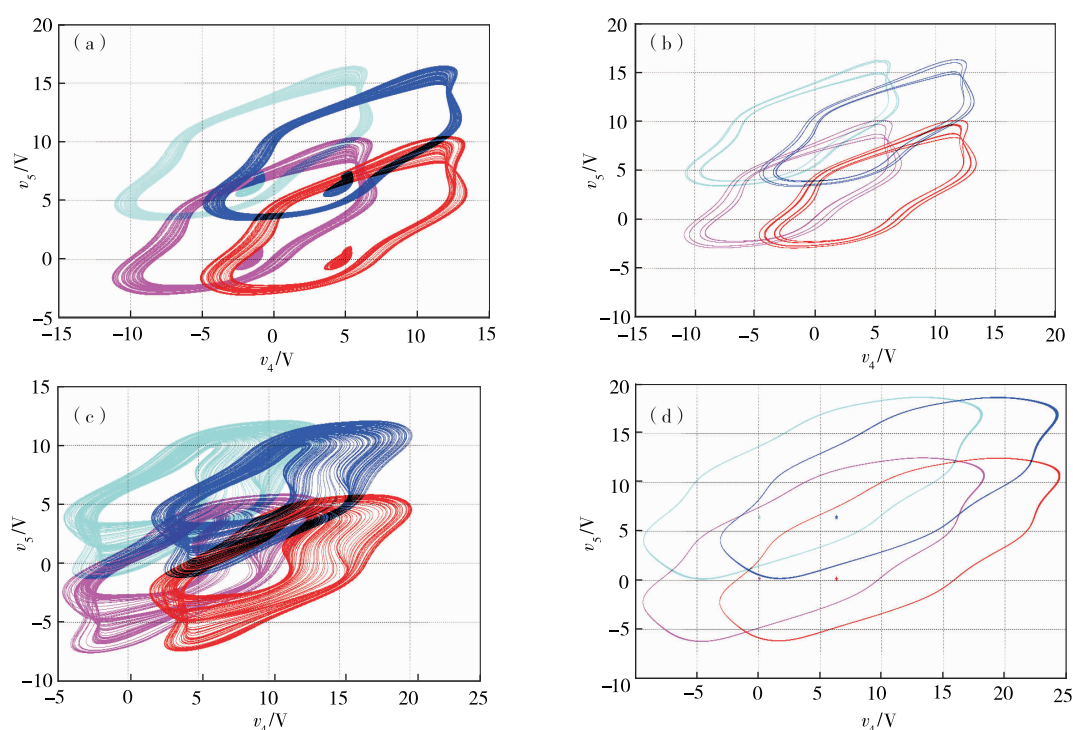


图6 分布在 v_4 - v_5 平面上忆阻初值偏置控制的共存吸引子

Fig.6 Memristor initial offset-boosted coexisting attractors in v_4 - v_5 plane

4 结论

在一个简单的三维线性自治系统中引入两个具有正弦忆导的忆阻元件,提出了一种新颖的三维忆阻动力学系统。因此,该忆阻动力学系统是通过结合忆阻初值激发的、周期偏置控制的无限多共存吸引子的两种方法来实现的,这是近期备受关注的热点问题。利用所提出的忆阻动力学系统,研究了面平衡点及其在初值平面上的复杂稳定性分布。借助数值仿真,发现了忆阻初值控制的平面共存分岔现象,进而揭示了忆阻初值依赖的超级多稳定性。最后,基于物理电路实现的PSIM仿真验证了平面偏置控制的共存行为。因此,理论和数值结果证明,忆阻系统初值偏置控制的平面共存分岔形成更为复杂的超级多稳定性,可为基于混沌的潜在应用提供更多的灵活性。

参考文献:

- [1]CHEN M, SUN M X, BAO H, et al. Flux-charge analysis of two-memristor-based chua's circuit; dimensionality decreasing model for detecting extreme multistability[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(3): 2197-2206.
- [2]LI C, MIN F H, JIN Q S, et al. Extreme multistability analysis of memristor-based chaotic system and its application in image decryption[J]. AIP Advances, 2017, 7(12): 125204.
- [3]CHEN M, SUN M X, BAO B C, et al. Controlling extreme multistability of memristor emulator-based dynamical circuit in flux-charge domain[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(2): 1395-1412.
- [4]CHEN M, FENG Y, BAO H, et al. Hybrid state variable incremental integral for reconstructing extreme multistability in memristive jerk system with cubic nonlinearity[J]. Complexity, 2019, 2019: 1-16.
- [5]BAO B C, JIANG T, WANG G Y, et al. Two-memristor-based Chua's hyperchaotic circuit with plane equilibrium and its extreme multistability[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(2): 1157-1171.
- [6]ZHANG Y Z, LIU Z, WU H G, et al. Two-memristor-based chaotic system and its extreme multistability reconstitution via dimensionality reduction analysis[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2019, 127: 354-363.
- [7]BAO B C, BAO H, WANG N, et al. Hidden extreme multistability in memristive hyperchaotic system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2017, 94: 102-111.
- [8]BAO H, LIU W B, CHEN M. Hidden extreme multistability and dimensionality reduction analysis for an improved non-autonomous memristive FitzHugh-Nagumo circuit[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 96(3): 1879-1894.
- [9]JAFARI S, AHMADI A, PANAH S, et al. Extreme multi-stability: when imperfection changes quality[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2018, 108: 182-186.
- [10]NJITACKE Z T, KENGNE J, TAPCHE R W, et al. Uncertain destination dynamics of a novel memristive 4D autonomous system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2018, 107: 177-185.
- [11]YUAN F, DENG Y, LI Y X, et al. The amplitude, frequency and parameter space boosting in a memristor meminductor-based circuit[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 96(1): 389-405.
- [12]LI C B, SPROTT J C, MEI Y. An infinite 2-D lattice of strange attractors[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(4): 2629-2639.
- [13]LI C B, JOO-CHEN THIO W, SPROTT J C, et al. Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit[J]. IEEE Access, 2018, 6: 29003-29012.
- [14]LI C B, SPROTT J C. An infinite 3-D quasiperiodic lattice of chaotic attractors[J]. Physics Letters A, 2018, 382(8): 581-587.
- [15]LI C B, XU Y J, CHEN G R, et al. Conditional symmetry: bond for attractor growing[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(2): 1245-1256.
- [16]SUN J W, ZHAO X T, FANG J, et al. Autonomous memristor chaotic systems of infinite chaotic attractors and circuitry realization[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 94(4): 2879-2887.

(责任编辑:李艳)