

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2022.01.006

一种零耦合度及部分运动解耦的空间 2T1R 并联机构动力学建模

汤 耀, 沈惠平, 曾博雄, 杨廷力

(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164)

摘要:针对一种零耦合度的空间 2T1R 并联机构,求解各构件速度与驱动副速度之间的关系矩阵;运用基于虚功原理的序单开链法,建立了机构的动力学模型,求解了机构的驱动力及连接 2 个 SKC 连接处运动副的支反力,进行算例验证;并就动力学方法求解的实时性,通过对比选用两种不同广义坐标时动力学方程求解所用的时间,给出优选广义坐标的建议。研究结果为该机构的设计和动力学优化奠定了基础。

关键词:并联机构;逆向运动学;动力学模型;虚功原理;序单开链法

中图分类号:TH 112

文献标志码:A

文章编号:2095-0411(2022)01-0048-12

Dynamics Modeling of a Spatial 2T1R Parallel Mechanism with Zero Coupling Degree and Partial Motion Decoupling

TANG Yao, SHEN Huiping, ZENG Boxiong, YANG Tingli

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: For a spatial 2T1R parallel mechanism(PM) with zero coupling degree, the relationship matrix between the speed of each component and the speed of driving pair was analyzed firstly. Then, the dynamic model of the PM was established by using the ordered-single-open-chain method based on the principle of virtual work, and the driving force of the PM and the reaction force connecting two SKC joints were solved. Finally, through the theoretical calculation of Matlab and the simulation of Adams, the driving force and the important reaction force were verified by examples. By comparing the time of dynamic solution under two different generalized coordinates, the optimal generalized coordinate was selected and the suggestion of optimizing the generalized coordinates was given. The research results provided the theoretical basis of mechanics for the practical design, manufacture and application of the PM.

Key words: parallel mechanism; reverse kinematics; dynamic model; principle of virtual work; or-

收稿日期: 2021-10-20。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51975062)。

作者简介: 汤耀(1996—), 男, 江苏徐州人, 硕士生。通信联系人: 沈惠平(1965—), E-mail: shp65@126.com

引用本文: 汤耀, 沈惠平, 曾博雄, 等. 一种零耦合度及部分运动解耦的空间 2T1R 并联机构动力学建模[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2022, 34(1): 48-59.

dered-single-open-chain method

具有转动和移动混合输出的 2T1R 空间并联机构,因其驱动元件少、制造容易等特点,在空间抓取、调整姿态等操作中,具有较广泛的应用价值^[1-6]。

对一个有待研发的并联机器人而言,建立一个精度高且响应快的动力学模型至关重要^[7-9]。常用的动力学建模方法主要有:Lagrange 法、Newton-Euler 法、虚功原理法等^[10-12]。Lagrange 法根据动能和势能推导出动力力学模型,对于多杆件机构,此方法计算量大,且无法求解系统运动副处的支反力;Newton-Euler 法通过对各杆件单独分析求得各关节的约束力,再通过消除各杆件的相互作用力,来建立完整的动力学模型,该方法建模思路清晰,但其推导过程复杂,计算量也大;虚功原理法根据系统的虚位移做功推导动力学模型,在计算过程中只需求解少数速度矩阵和作用力,因此,具有高效、方便的特点,但不能求得运动副反力。

进一步,杨廷力^[13]提出了用于动力学建模的基于虚功原理的序单开链法,该方法的建模基本单元是子运动链(SKC),不仅具有传统虚功原理计算过程简洁的优点,而且能够求出各 SKC 连接处的运动副支反力,这对机构构件的强度计算、结构设计以及机械振动研究等具有重要的作用。

在研究对象方面,对 6-DOF 并联机构,丁华锋等^[14]基于虚功原理建立了一种新型 6-DOF 并联机构的动力学数学模型;对 5-DOF 并联机构,陈修龙等^[15]基于虚功原理,对 4-UPS-UPU 机构进行动力学分析;张东胜等^[16]还研究了 5-DOF 混联机器人的逆动力学;而 4-DOF 并联机构方面,蔡善乐等^[17]运用虚功原理法,对 2PRS-2UPS 并联机构进行动力学分析;3-DOF 并联机构方面,高征等^[18]、陈子明等^[19],分别利用拉格朗日法和虚功原理,对三自由度旋转台、对称两转一移 3-UPU 并联机构的动力学进行分析;贾晓辉等^[20]采用虚功原理方法,推导出 3-RRPR 柔性机构的动力学逆解模型,并给出了系统固有频率的求解表达式。尤晶晶等^[21]针对一种具有解析位置正解的新型三自由度并联机构,求解了其逆向动力学方程。

本课题组设计、提出的一种新型 3-DOF 空间 2T1R 并联机构 2P(Pa2R)2R-P(PaR)^[22],首先进行运动学分析,求得该机构每个构件的速度、加速度,然后,使用基于虚功原理的序单开链法,建立其逆向动力学模型,求解验证了该机构的驱动力和 SKC 连接处的支反力;并分析比较了不同广义坐标下的动力学方程求解的时间。为该机构的样机设计和动力学优化提供了技术依据。

1 2T1R 并联机构的设计

本文研究的一种新型 3-DOF 空间 2T1R 并联机构,为零耦合度、部分运动解耦,且具有符号式位置正解,它由静平台 0、动平台 1 和 2 条混合支链组成^[22],如图 1 所示。

前左侧混合支链 I 中,在平面回路机构 $P_2 || P_a^{(1)} \perp R_{12} || R_{11} \perp P_1$ 产生两平移的输出杆 6 上,再串联两个轴线相互平行的转动副 R_3 与 R_4 ,混合支链 I 的拓扑结构等效地记为: $\{-(P_2 || P_a^{(1)} \perp R_{12} || R_{11} \perp P_1) \perp R_3 || R_4 -\}$,其中,移动副 $P_a^{(1)}$ 由转动副 R_{a1} ,转动副 R_{b1} ,转动副 R_{c1} 和转动副 R_{d1} 组合而产生的。

后右侧的混合支链 II 的拓扑结构等效地记为:

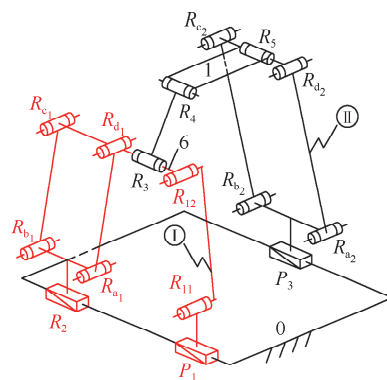


图 1 2T1R 并联机构简图

Fig.1 Structure diagram of the 2T1R PM

2.2 速度与加速度分析

2.2.1 子运动链 II 中各杆件

1) 动平台

设 P 点的输出速度为 $\mathbf{v}_1 = [\dot{y}' \quad \dot{z}' \quad \dot{\beta}']^T$, 驱动移动速度为 $\mathbf{v}_2 = [\dot{y}_{A_1}' \quad \dot{y}_{A_2}' \quad \dot{y}_{A_3}']^T$, 对式(1)两边关于 t 求一阶导数、二阶导数, 可得:

$$\mathbf{J}_p \mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2 \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_p \mathbf{v}_1' - \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2' + \mathbf{K} = 0 \quad (3)$$

式中: $\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$; $\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$; $\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]^T$ 。其中, $f_{11} = u_{11} = y_{C_1} - y_{B_1}$,

$$f_{12} = z_{C_1} - z_{B_1}, f_{13} = (-d \cos \beta - 2d \sin \beta \cot \alpha)(z_{C_1} - z_{B_1}), f_{21} = u_{22} = y_{C_2} - y_{B_2}, f_{22} = z_{C_2} - z_{B_2}, f_{23} =$$

$$(-d \cos \beta - 2d \sin \beta \cot \alpha)(z_{C_2} - z_{B_2}), f_{31} = u_{33} = y_{C_3} - y_{B_3}, f_{32} = z_{C_3} - z_{B_3}, f_{33} = d \cos \beta (z_{C_3} - z_{B_3}), K_1 =$$

$$\frac{df_{11}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{12}}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{df_{13}}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \frac{du_{11}}{dt} \frac{dy_{A_1}}{dt}, K_2 = \frac{df_{21}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{22}}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{df_{23}}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \frac{du_{22}}{dt} \frac{dy_{A_2}}{dt}, K_3 = \frac{df_{31}}{dt} \frac{dy}{dt} +$$

$$\frac{df_{32}}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{df_{33}}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \frac{du_{33}}{dt} \frac{dy_{A_3}}{dt}。$$

机构非奇异时, \mathbf{J}_p 可逆, 由式(2)、式(3)可得:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2 \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2' - \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{K} \quad (5)$$

式(4)、式(5)为动平台 1 上 P 点的输出速度、输出加速度。

为了便于后续计算, 现将动平台 1 的速度矩阵分解为平动矩阵和转动矩阵, 即:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{G}_1 \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vp_1} \mathbf{v}_2 \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{G}_2 \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{wp_1} \mathbf{v}_2 \quad (7)$$

式中: $\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \sin \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

同理, 可求出点 D_2 、点 C_3 的速度和加速度矩阵分别为:

$$\mathbf{v}_{D_2} = \mathbf{J}_{D_2} \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vD_2} \mathbf{v}_2 \quad (8)$$

$$\mathbf{a}_{D_2} = \mathbf{J}_{D_2} \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2' + \mathbf{G}_{D_2} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_{C_3} = \mathbf{J}_{C_3} \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vC_3} \mathbf{v}_2 \quad (10)$$

$$\mathbf{a}_{C_3} = \mathbf{J}_{C_3} \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \mathbf{v}_2' + \mathbf{G}_{C_3} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{J}_{D_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2d \sin \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d \cos \beta \end{bmatrix}$; $\mathbf{G}_{D_2} = \begin{bmatrix} -2d\beta'^2 \cos \beta \\ 0 \\ d\beta'^2 \sin \beta \end{bmatrix}$; $\mathbf{J}_{C_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2d \sin \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d \cos \beta \end{bmatrix}$; $\mathbf{G}_{C_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d\beta'^2 \sin \beta \end{bmatrix}$ 。

2) 驱动滑块 A_3B_3

滑块 A_3B_3 质心的速度、加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{s_3} = \mathbf{J}_{vs_3} \mathbf{v}_2 \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_{s_3} = \mathbf{J}_{vs_3} \mathbf{v}_2' \quad (13)$$

式中 $J_{vs_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

3) 杆件 B_3C_3

将 $B_{31}C_{31}, B_{32}C_{32}$ 杆件的运动等效为杆件 B_3C_3 进行分析。易知, C_3 点的速度为

$$v_{C_3} = v_{s_3} + \omega_{u_3} \times e_3 \cdot l_7 = J_{vC_3} v_2 \quad (14)$$

式中: ω_{u_3} 为杆件 B_3C_3 的角速度; e_3 为杆件 B_3C_3 的单位矢量。

对式(14)两边同时叉乘 e_3 , 整理得 ω_{u_3}

$$\omega_{u_3} = \frac{e_3 \times (J_{vC_3} - J_{vs_3})}{l_7} v_2 = J_{\omega u_3} v_2 \quad (15)$$

杆件 B_3C_3 质心的速度矩阵表示为

$$v_{u_3} = \frac{J_{vC_3} + J_{vs_3}}{2} v_2 = J_{vu_3} v_2 \quad (16)$$

进一步, 对式(14)求导, 得 C_3 点的加速度为

$$a_{C_3} = a_{s_3} + \varepsilon_{u_3} \times e_3 \cdot l_7 + \omega_{u_3} \times (\omega_{u_3} \times e_3) \cdot l_7 \quad (17)$$

对式(17)两边同时叉乘 e_3 , 可得杆件 B_3C_3 的角加速度为

$$\varepsilon_{u_3} = \frac{e_3 \times (a_{C_3} - a_{s_3})}{l_7} = \frac{\tilde{e}_3 (a_{C_3} - a_{s_3})}{l_7} \quad (18)$$

式中 \tilde{e}_3 为 e_3 的斜对称矩阵。

将式(16)求导, 得杆件 B_3C_3 的质心加速度为

$$a_{u_3} = a_{s_3} + \varepsilon_{u_3} \times e_3 \cdot l_7 / 2 + \omega_{u_3} \times (\omega_{u_3} \times e_3) \cdot l_7 / 2 = (a_{s_3} + a_{C_3}) / 2 \quad (19)$$

4) 杆件 $C_{31}C_{32}$

杆件 $C_{31}C_{32}$ 质心的速度、加速度分别为:

$$v_{s_5} = v_{C_3} = J_{vs_5} v_2 \quad (20)$$

$$a_{s_5} = a_{C_3} \quad (21)$$

5) 杆件 D_1D_2

设 D_1 点的输出速度为 $v_3 = [y'_{D_1} \quad z'_{D_1} \quad 0]^T$, 驱动移动速度为 $v_2 = [y'_{A_1} \quad y'_{A_2} \quad y'_{A_3}]^T$, 对满足杆长 C_1B_1, C_2B_2 的约束位置方程求导, 一阶导数、二阶导数可表示为:

$$J_m v_3 = J_n v_2 \quad (22)$$

$$J_m v'_3 - J_n v'_2 + L = 0 \quad (23)$$

式中: $J_m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; J_n = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; L = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$ 。其中, $m_{11} = n_{11} = y_{D_1} - y_{A_1} + l_4 / 2$,

$$m_{12} = m_{22} = z_{D_1} - l_1, m_{21} = n_{22} = y_{D_1} - y_{A_2} - (l_4 + l_2) / 2, L_1 = \frac{dm_{11}}{dt} \frac{dy_{D_1}}{dt} + \frac{dm_{12}}{dt} \frac{dz_{D_1}}{dt} - \frac{dn_{11}}{dt} \frac{dy_{A_1}}{dt},$$

$$L_2 = \frac{dm_{21}}{dt} \frac{dy_{D_1}}{dt} + \frac{dm_{22}}{dt} \frac{dz_{D_1}}{dt} - \frac{dn_{12}}{dt} \frac{dy_{A_2}}{dt}, L_3 = 0。$$

机构非奇异时, J_m 可逆, 由式(22)、式(23)得:

$$v_3 = J_m^{-1} J_n v_2 \quad (24)$$

$$v'_3 = J_m^{-1} J_n v'_2 - J_m^{-1} L \quad (25)$$

D_1 点的速度、加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{D_1} = \mathbf{G}_3 \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vs_4} \mathbf{v}_2 \quad (26)$$

$$\mathbf{a}_{D_1} = \mathbf{G}_3 \mathbf{v}_3' \quad (27)$$

$$\text{式中 } \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

易知, D_2 点的速度为

$$\mathbf{v}_{D_2} = \mathbf{v}_{D_1} + \boldsymbol{\omega}_{u_4} \times \mathbf{e}_4 \cdot l_5$$

式中: $\boldsymbol{\omega}_{u_4}$ 为杆件 $D_1 D_2$ 的角速度; \mathbf{e}_4 为杆件 $D_1 D_2$ 的单位矢量。

得杆件 $D_1 D_2$ 的角速度、质心的速度分别为:

$$\boldsymbol{\omega}_{u_4} = \frac{\mathbf{e}_4 \times (\mathbf{J}_{vD_2} - \mathbf{J}_{vs_4})}{l_5} \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{wu_4} \mathbf{v}_2 \quad (28)$$

$$\mathbf{v}_{u_4} = \frac{\mathbf{J}_{vD_2} + \mathbf{J}_{vs_4}}{2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vu_4} \mathbf{v}_2 \quad (29)$$

进一步, D_2 点的加速度为

$$\mathbf{a}_{D_2} = \mathbf{a}_{D_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{u_4} \times \mathbf{e}_4 \cdot l_5 + \boldsymbol{\omega}_{u_4} \times (\boldsymbol{\omega}_{u_4} \times \mathbf{e}_4) \cdot l_5$$

杆件 $D_1 D_2$ 的角加速度、质心加速度分别为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{u_4} = \frac{\mathbf{e}_4 \times (\mathbf{a}_{D_2} - \mathbf{a}_{D_1})}{l_5} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_4 (\mathbf{a}_{D_2} - \mathbf{a}_{D_1})}{l_5}$$

$$\mathbf{a}_{u_4} = \mathbf{a}_{D_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{u_4} \times \mathbf{e}_4 \cdot l_5 / 2 + \boldsymbol{\omega}_{u_4} \times (\boldsymbol{\omega}_{u_4} \times \mathbf{e}_4) \cdot l_5 / 2 = (\mathbf{a}_{D_1} + \mathbf{a}_{D_2}) / 2$$

式中 $\tilde{\mathbf{e}}_4$ 为 \mathbf{e}_4 的斜对称矩阵。

2.2.2 子运动链 I 中各杆件

1) 杆件 $C_1 C_{22}$

杆件 $C_1 C_{22}$ 质心的速度、加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{s_4} = \mathbf{v}_{D_1} = \mathbf{J}_{vs_4} \mathbf{v}_2 \quad (30)$$

$$\mathbf{a}_{s_4} = \mathbf{a}_{D_1} \quad (31)$$

2) 驱动滑块 $A_j B_j (j=1, 2)$

滑块 $A_j B_j (j=1, 2)$ 质心的速度、加速度分别为:

$$\mathbf{v}_{s_j} = \mathbf{J}_{vs_j} \mathbf{v}_2 \quad (32)$$

$$\mathbf{a}_{s_j} = \mathbf{J}_{vs_j} \mathbf{v}_2' \quad (33)$$

$$\text{式中: } \mathbf{J}_{vs_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{J}_{vs_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

3) 杆件 $B_1 C_1$

易知, C_1 点的速度为

$$\mathbf{v}_{C_1} = \mathbf{v}_{s_1} + \boldsymbol{\omega}_{u_1} \times \mathbf{e}_1 \cdot l_3 = \mathbf{J}_{vs_4} \mathbf{v}_2 \quad (34)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}_{u_1}$ 为杆件 $B_1 C_1$ 的角速度; \mathbf{e}_1 为杆件 $B_1 C_1$ 的单位矢量。

对式(34)两边同时叉乘 \mathbf{e}_1 , 整理得

$$\boldsymbol{\omega}_{u_1} = \frac{\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{J}_{vs_4} - \mathbf{J}_{vs_1})}{l_3} \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{wu_1} \mathbf{v}_2 \quad (35)$$

杆件 $B_1 C_1$ 质心的速度的矩阵表示为

$$\mathbf{v}_{u_1} = \frac{\mathbf{J}_{vs_4} + \mathbf{J}_{vs_1}}{2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vu_1} \mathbf{v}_2 \quad (36)$$

进一步,对式(34)求导,得 C_1 点的加速度为

$$\mathbf{a}_{C_1} = \mathbf{a}_{s_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{u_1} \times \mathbf{e}_1 \cdot l_3 + \boldsymbol{\omega}_{u_1} \times (\boldsymbol{\omega}_{u_1} \times \mathbf{e}_1) \cdot l_3 \quad (37)$$

对式(37)两边同时叉乘 \mathbf{e}_1 ,可得杆件 B_1C_1 的角加速度为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{u_1} = \frac{\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_{C_1} - \mathbf{a}_{s_1})}{l_3} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_1 (\mathbf{a}_{C_1} - \mathbf{a}_{s_1})}{l_3} \quad (38)$$

式中 $\tilde{\mathbf{e}}_1$ 为 \mathbf{e}_1 的斜对称矩阵。

进一步,将式(36)求导,得杆件 B_1C_1 的质心加速度为

$$\mathbf{a}_{u_1} = \mathbf{a}_{s_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{u_1} \times \mathbf{e}_1 \cdot l_3/2 + \boldsymbol{\omega}_{u_1} \times (\boldsymbol{\omega}_{u_1} \times \mathbf{e}_1) \cdot l_3/2 = (\mathbf{a}_{s_1} + \mathbf{a}_{C_1})/2 \quad (39)$$

4) 杆件 B_2C_2

将 $B_{21}C_{21}$, $B_{22}C_{22}$ 杆的运动,等效为杆件 B_2C_2 进行分析。

同理,采用与杆件 B_1C_1 速度、加速度相同的求法,得到杆件 B_2C_2 的角速度、质心的速度分别为:

$$\boldsymbol{\omega}_{u_2} = \frac{\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{J}_{vs_4} - \mathbf{J}_{vs_2})}{l_3} \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{wu_2} \mathbf{v}_2 \quad (40)$$

$$\mathbf{v}_{u_2} = \frac{\mathbf{J}_{vs_4} + \mathbf{J}_{vs_2}}{2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_{vu_2} \mathbf{v}_2 \quad (41)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}_{u_2}$ 为杆件 B_2C_2 的角速度; \mathbf{e}_2 为杆件 B_2C_2 的单位矢量。

进一步, C_2 点的加速度为

$$\mathbf{a}_{C_2} = \mathbf{a}_{s_2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{u_2} \times \mathbf{e}_2 \cdot l_3 + \boldsymbol{\omega}_{u_2} \times (\boldsymbol{\omega}_{u_2} \times \mathbf{e}_2) \cdot l_3$$

而杆件 B_2C_2 的角加速度、质心加速度分别为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{u_2} = \frac{\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{a}_{C_2} - \mathbf{a}_{s_2})}{l_3} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2 (\mathbf{a}_{C_2} - \mathbf{a}_{s_2})}{l_3}$$

$$\mathbf{a}_{u_2} = \mathbf{a}_{s_2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{u_2} \times \mathbf{e}_2 \cdot l_3/2 + \boldsymbol{\omega}_{u_2} \times (\boldsymbol{\omega}_{u_2} \times \mathbf{e}_2) \cdot l_3/2 = (\mathbf{a}_{s_2} + \mathbf{a}_{C_2})/2$$

式中 $\tilde{\mathbf{e}}_2$ 为 \mathbf{e}_2 的斜对称矩阵。

3 动力学分析

易知,杆件 $B_{21}B_{22}$, A_2B_2 及杆件 $B_{31}B_{32}$, A_3B_3 分别为同一个构件。

3.1 基于虚功原理的序单开链法基本原理

对自由度为 f 、广义速度为 $\mathbf{q}'_f = [q'_1, q'_2, \dots, q'_f]^T$ 的机械系统,基于单开链(SOC)的机构组成原理,将其分成若干个,而每一个子运动链又可拓扑分解为若干个单开链 SOC (Δ_j^+), SOC(Δ_j^0), SOC(Δ_j^-);原系统被解除约束后,运动副支反力转化为作用在子系统构件上的未知外力;同时,新系统会增加 k 个自由度,且会增加广义速度 $\mathbf{q}'_k = [q'_{f+1}, q'_{f+2}, \dots, q'_{f+k}]^T$ 。

按上述结构分解的逆序,对各单开链进行动力分析,由单开链之间的约束关系和虚功原理,在理想约束下,外力(矩)和惯性力(矩)在机械系统的任何虚位移上的元功之和等于零,即可建立各 SKC 的动力学分析方程,其维度恰为机构耦合度 k ,在求出这 k 个未知支反力后,相应的驱动力(矩)可方便地直接求出^[13]。

3.2 动力学建模与方程的生成

将移动副在驱动力作用下产生的位移定义为广义坐标,即 $\mathbf{q}_1 = (y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3})^T$,对应产生的虚位移

为 $\delta \mathbf{q}_1 = (\delta y_{A_1}, \delta y_{A_2}, \delta y_{A_3})^T$ 。

由式(6)~式(7)、式(12)~式(20)、式(28)~式(41)可建立各杆件的虚位移与驱动副的虚位移之间的关系式为: $\delta \mathbf{X}_p = \mathbf{J}_{vp_1} \delta \mathbf{q}_1$, $\delta \boldsymbol{\theta}_p = \mathbf{J}_{wp_1} \delta \mathbf{q}_1$, $\delta \mathbf{X}_{u_i} = \mathbf{J}_{vu_i} \delta \mathbf{q}_1$, $\delta \mathbf{X}_{s_j} = \mathbf{J}_{vs_j} \delta \mathbf{q}_1$, $\delta \boldsymbol{\theta}_{u_i} = \mathbf{J}_{wu_i} \delta \mathbf{q}_1$ ($i=1 \sim 4, j=1 \sim 5$)。

3.2.1 子运动链 II 内各构件受力分析

1) 动平台

动平台在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力、惯性力矩分别为:

$${}^o\mathbf{G}_p = m_p {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_p = -m_p {}^o\mathbf{a}_p; {}^o\mathbf{n}_p = -{}^o\mathbf{I}_p {}^o\boldsymbol{\varepsilon}_p - {}^o\boldsymbol{\omega}_p \times ({}^o\mathbf{I}_p {}^o\boldsymbol{\omega}_p)$$

式中 ${}^o\mathbf{I}_p = {}^o\mathbf{R}^p \mathbf{I}_p {}^o\mathbf{R}^T$ 为动平台的惯量。

动平台在工作时产生的力和力矩为:

$${}^o\mathbf{F}_p = {}^o\mathbf{R}^p \mathbf{F}_p; {}^o\mathbf{M}_p = {}^o\mathbf{R}^p \mathbf{M}_p$$

2) 移动滑块 A_3B_3

该滑块在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力分别为:

$${}^o\mathbf{G}_{s_3} = m_{s_3} {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_{s_3} = -m_{s_3} {}^o\mathbf{a}_{s_3}$$

3) 移动杆 $C_{31}C_{32}$

移动杆在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力分别为:

$${}^o\mathbf{G}_{s_5} = m_{s_5} {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_{s_5} = -m_{s_5} {}^o\mathbf{a}_{s_5}$$

4) 转动杆 (B_3C_3, D_1D_2)

转动杆在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力、惯性力矩 ($i=3, 4$) 分别为:

$${}^o\mathbf{G}_{u_i} = m_{u_i} {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_{u_i} = -m_{u_i} {}^o\mathbf{a}_{u_i}; {}^o\mathbf{n}_{u_i} = -{}^o\mathbf{I}_{u_i} {}^o\boldsymbol{\varepsilon}_{u_i} - {}^o\boldsymbol{\omega}_{u_i} \times ({}^o\mathbf{I}_{u_i} {}^o\boldsymbol{\omega}_{u_i})$$

式中 ${}^o\mathbf{I}_{u_i} = {}^o\mathbf{R}^{u_i} \mathbf{I}_{u_i} {}^o\mathbf{R}^T$ 为各转动杆件的惯量。

3.2.2 子运动链 I 内各构件受力分析

1) 移动滑块 (A_1B_1, A_2B_2)

移动滑块在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力 ($j=1, 2$) 分别为:

$${}^o\mathbf{G}_{s_j} = m_{s_j} {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_{s_j} = -m_{s_j} {}^o\mathbf{a}_{s_j}$$

2) 移动杆 C_1C_{22}

移动杆在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力分别为:

$${}^o\mathbf{G}_{s_4} = m_{s_4} {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_{s_4} = -m_{s_4} {}^o\mathbf{a}_{s_4}$$

3) 转动杆 (B_1C_1, B_2C_2)

转动杆在静坐标系 $\{O\}$ 下的重力、惯性力、惯性力矩 ($i=1, 2$) 分别为:

$${}^o\mathbf{G}_{u_i} = m_{u_i} {}^o\mathbf{g}; {}^o\mathbf{f}_{u_i} = -m_{u_i} {}^o\mathbf{a}_{u_i}; {}^o\mathbf{n}_{u_i} = -{}^o\mathbf{I}_{u_i} {}^o\boldsymbol{\varepsilon}_{u_i} - {}^o\boldsymbol{\omega}_{u_i} \times ({}^o\mathbf{I}_{u_i} {}^o\boldsymbol{\omega}_{u_i})$$

式中 ${}^o\mathbf{I}_{u_i} = {}^o\mathbf{R}^{u_i} \mathbf{I}_{u_i} {}^o\mathbf{R}^T$ 为各转动杆件的惯量。

为简化动力学方程的计算,在静坐标系 $\{O\}$ 下,将机构构件所受的外力(矩),化简为各杆件质心位置的六维合力矢量。

动平台的六维合力矢量

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{M}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^o\mathbf{f}_p + {}^o\mathbf{G}_p + {}^o\mathbf{F}_p \\ {}^o\mathbf{n}_p + {}^o\mathbf{M}_p \end{bmatrix} \quad (42)$$

移动杆(滑块)的六维合力矢量

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{s_j} \\ \mathbf{M}_{s_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^o\mathbf{f}_{s_j} + {}^o\mathbf{G}_{s_j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

转动杆的六维合力矢量

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{u_i} \\ \mathbf{M}_{u_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^o\mathbf{f}_{u_i} + {}^o\mathbf{G}_{u_i} \\ {}^on_{u_i} \end{bmatrix} \quad (44)$$

3.2.3 动力学方程的生成

解除联接 2 个 SKC 的运动副 D_1 处的约束,则得到 2 个子系统,于是,支反力 F_4 转化为作用在该 2 个子系统构件上的未知外力。由于 2 个 SKC 的耦合度均为 0,其广义坐标与原系统的广义坐标相同,根据虚功原理可得,子运动链 II 的动力学方程为

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{X}_{s_3} + \mathbf{F}_{s_3}^T \delta \mathbf{X}_{s_3} + \mathbf{F}_{u_3}^T \delta \mathbf{X}_{u_3} + \mathbf{M}_{u_3}^T \delta \theta_{u_3} + \mathbf{F}_{s_5}^T \delta \mathbf{X}_{s_5} + \mathbf{F}_p^T \delta \mathbf{X}_p + \mathbf{M}_p^T \delta \theta_p + \mathbf{F}_{u_4}^T \delta \mathbf{X}_{u_4} + \mathbf{M}_{u_4}^T \delta \theta_{u_4} - \mathbf{F}_4^T \delta \mathbf{X}_{s_4} = 0 \quad (45)$$

而子运动链 I 的动力学方程为

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{X}_{s_1} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{X}_{s_2} + \mathbf{F}_{s_1}^T \delta \mathbf{X}_{s_1} + \mathbf{F}_{s_2}^T \delta \mathbf{X}_{s_2} + \mathbf{F}_{u_1}^T \delta \mathbf{X}_{u_1} + \mathbf{M}_{u_1}^T \delta \theta_{u_1} + \mathbf{F}_{u_2}^T \delta \mathbf{X}_{u_2} + \mathbf{M}_{u_2}^T \delta \theta_{u_2} + (\mathbf{F}_{s_4} + \mathbf{F}_4)^T \delta \mathbf{X}_{s_4} = 0 \quad (46)$$

式中 $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)^T$ 。

将式(6)~式(7)、式(12)~式(20)、式(28)~式(44)代入式(45)~式(46),即可求出驱动力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 以及运动副 D_1 处的支反力 \mathbf{F}_4 。

3.3 机构动力学分析实例

设机构的构件质量为: $m_p = 0.0317 \text{ kg}$, $m_{s_1} = 0.0221 \text{ kg}$, $m_{s_2} = 0.0367 \text{ kg}$, $m_{s_3} = 0.0397 \text{ kg}$, $m_{s_4} = 0.0237 \text{ kg}$, $m_{s_5} = 0.0148 \text{ kg}$, $m_{u_1} = 0.0560 \text{ kg}$, $m_{u_2} = 0.1121 \text{ kg}$, $m_{u_3} = 0.1274 \text{ kg}$, $m_{u_4} = 0.0415 \text{ kg}$ 。

构件杆长与文献[22]一致,为: $a = 295 \text{ mm}$, $b = 125 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$, $l_1 = 20 \text{ mm}$, $l_2 = 80 \text{ mm}$, $l_3 = 230 \text{ mm}$, $l_4 = 90 \text{ mm}$, $l_5 = 170 \text{ mm}$, $l_6 = 100 \text{ mm}$, $l_7 = 280 \text{ mm}$ 。

构件的转动惯量参数,见表 1。

3.3.1 驱动力求解

1) 两种广义坐标下的计算

采用与文献[22]相同的运动规律(单位为 mm):
 $y_{A_1} = 162.1326 + 50 \sin t$, $y_{A_2} = -168.9264 + 50 \sin t$,
 $y_{A_3} = 98.4300 - 50 \sin t$ 。

① 将 3 个驱动滑块产生的位移定义为广义坐标,即 $\mathbf{q}_1 = (y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3})^T$;利用 Matlab 数值计算得到机构动平台空载(即 ${}^o\mathbf{F}_p = 0, {}^o\mathbf{M}_p = 0$)的驱动力变化曲线(运算步数为 1 000 步),如图 3 所示。

进一步,记录 10 次 Matlab 数值计算所用的时间,见表 2 中 t_1 列所示。

表 1 2T1R 并联机构中各构件的转动惯量参数
Table 1 Moment of inertia parameters of components in 2T1R PM $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

转动惯量	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
动平台 1	0.072 7	0.072 8	0.000 3
转动杆 B_1C_1	0.362 8	0.362 3	0.000 7
转动杆 B_2C_2	0.362 8	0.362 3	0.000 7
转动杆 B_3C_3	0.605 0	0.605 0	0.000 7
转动杆 D_1D_2	0.134 2	0.133 9	0.000 4

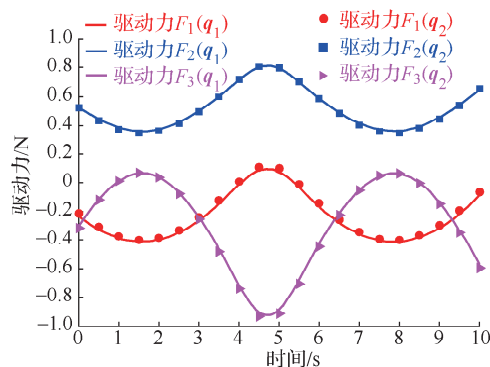


图 3 Matlab 计算得到驱动力变化曲线

Fig.3 Driving force curve is calculated by Matlab

② 再将动平台 1 在驱动滑块下产生的位移定义为广义坐标,即 $q_2=(y,z,\beta)^T$,由于建模过程与选取 q_1 为广义坐标相似,这里仅给出利用 Matlab 计算得到的机构动平台空载(即 ${}^oF_p=0, {}^oM_p=0$)的驱动力变化曲线(运算步数为 1 000 步),如图 3 所示,同样记录 10 次 Matlab 数值计算所用的时间,见表 2 中 t_2 列。

2) 广义坐标的优选分析

由图 3 可知,基于虚功原理的序单开链法,在机构运动规律一致的前提下,选用不同的广义坐标,由 Matlab 计算得到的驱动力理论变化曲线是一致的。

由表 2 可知,选取 q_1 作为广义坐标时的 Matlab 理论计算所用时间,比取 q_2 作为广义坐标时的 Matlab 理论计算所用时间更短,响应更快。这是因为,尽管两种计算过程中,所给机构的运动时间一致且步长相同,但机构各构件速度与动平台速度点之间的关系矩阵,比建立各构件运动速度与驱动速度之间的关系矩阵更为复杂。

因此,可根据工作要求,选取合适的广义坐标进行动力学建模。建议:通过 3 个移动副取相同速度沿着导轨大范围移动整个机构到固定地点时,宜选取 q_1 作为广义坐标,响应更快;而当控制动平台的精确工作轨迹时,宜选取 q_2 作为广义坐标,这样计算过程更简便,动平台可获得更高的精度。

3) 动力学仿真计算

进一步,将虚拟样机导入到 Adams 中,设定好机构的运动副类型、驱动副的运动轨迹,施加沿 Z 轴反方向的重力,并选取仿真步长为 0.01 s,仿真时间为 10 s,对该 2T1R 虚拟样机进行动力学仿真,得到的驱动力仿真变化曲线如图 4 中仿真值所示。由图 4 可知,运用 Matlab 计算的理论驱动力曲线与 Adams 虚拟仿真驱动力结果吻合,证明了理论运算的正确性。

3.3.2 运动副 D_1 处的支反力求解

运用 Matlab 计算得到 2 个 SKC 联接处 D_1 点的理论支反力变化曲线,如图 5 中理论值所示;而用 Adams 仿真得到 D_1 点的仿真支反力变化曲线,如图 5 中仿真值所示。由图 5 可知,基于虚功原理的序单开链法,运用 Matlab 计算 D_1 点的理论支反力曲线,与 Adams 得到的 D_1 点的仿真支反力曲线一致,说明了理论运算的正确性。

表 2 用 Matlab 计算时间 t_1 和 t_2 (对应广义坐标 q_1 和 q_2)

Table 2 Numerical calculation time t_1 and t_2 with Matlab(the generalized coordinates are q_1 and q_2) s

次数	t_1	t_2
1	7.049	7.712
2	6.883	7.761
3	6.872	7.860
4	6.774	7.717
5	7.056	7.802
6	6.777	7.767
7	7.014	7.840
8	7.305	7.870
9	6.943	7.760
10	6.845	8.027
平均时间	6.952	7.812

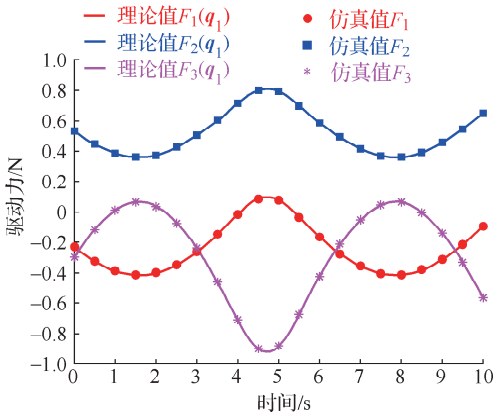


图 4 驱动力变化曲线中的理论值与仿真值

Fig.4 Theoretical value and simulation value in driving force variation curve

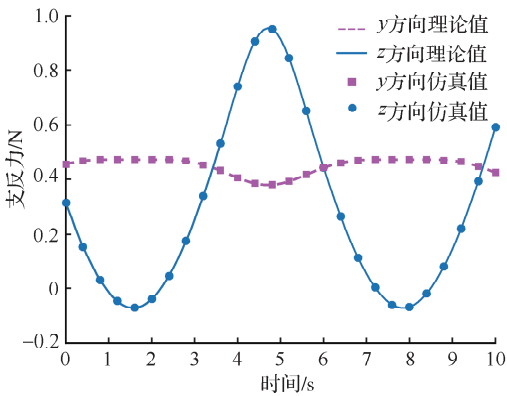


图 5 D_1 点处支反力变化曲线

Fig.5 The change curve of D_1 reaction force

由于 D_1 点仅能在 YOZ 平面内进行运动,因此, D_1 在 X 方向的支反力不能利用基于虚功原理的序单开链法求出,但可用基于 Newton-Euler 的序单开链法^[13]求得。

3.4 与传统虚功原理法的比较分析

由虚功原理可得

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{q}_1 + \mathbf{F}_p^T \delta \mathbf{X}_p + \mathbf{M}_p^T \delta \boldsymbol{\theta}_p + \sum_{j=1}^5 (\mathbf{F}_{s_j}^T \delta \mathbf{X}_{s_j}) + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{F}_{u_i}^T \delta \mathbf{X}_{u_i} + \mathbf{M}_{u_i}^T \delta \boldsymbol{\theta}_{u_i}) = 0 \quad (47)$$

式中 $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)^T$ 。其他参数与式(45)~式(46)一致,进一步简化式(47)得

$$[\mathbf{F}^T + \mathbf{F}_p^T \mathbf{J}_{vp_1} + \mathbf{M}_p^T \mathbf{J}_{wp_1} + \sum_{j=1}^5 (\mathbf{F}_{s_j}^T \mathbf{J}_{vs_j}) + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{F}_{u_i}^T \mathbf{J}_{vu_i} + \mathbf{M}_{u_i}^T \mathbf{J}_{wu_i})] \delta \mathbf{q}_1 = 0 \quad (48)$$

因式(48)上虚位移 $\delta \mathbf{q}_1$ 各元素可以独立选取,因此,可得驱动力方程

$$\mathbf{F}^T = -\mathbf{F}_p^T \mathbf{J}_{vp_1} - \mathbf{M}_p^T \mathbf{J}_{wp_1} - \sum_{j=1}^5 (\mathbf{F}_{s_j}^T \mathbf{J}_{vs_j}) - \sum_{i=1}^4 (\mathbf{F}_{u_i}^T \mathbf{J}_{vu_i} + \mathbf{M}_{u_i}^T \mathbf{J}_{wu_i}) \quad (49)$$

采用 3.3 节中相同的参数和运动规律,且把 $\mathbf{q}_1 = (y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3})^T$ 作为广义坐标,由式(48)利用 Matlab 计算得到机构动平台空载(即 ${}^o\mathbf{F}_p=0, {}^o\mathbf{M}_p=0$)的理论驱动力变化曲线,与图 3 中以 \mathbf{q}_1 为广义坐标的曲线一致,故不单独列出。

可见,传统的虚功原理法,在建模过程中不分建模单元的先后顺序,且在动力学方程中没有体现求解任何运动副处的支反力。而基于虚功原理的序单开链法,不仅可以求出各个 SKC 连接处运动副的支反力(这有助于求解各 SKC 内其他运动副的受力情况),而且通过 SKC 揭示了机构运动学与动力学之间的内在联系。

4 结 论

分析了一种新型的两平移—转动并联机构中各个杆件速度与驱动副速度之间的关系矩阵;采用基于虚功原理的序单开链法,建立该机构的动力学模型,并求解了机构的驱动力及 2 个 SKC 连接处运动副的支反力并进行了实例验证。

选取不同的广义坐标进行空间机构的逆向动力学建模与求解,其计算量不同。因此,在实际情况中需要根据工作情况,选取合适的广义坐标。移动整个机构到固定地点时,宜选取驱动副位移作为广义坐标,这样响应更快;而当控制动平台的精确工作轨迹时,宜选取动平台位移作为广义坐标,这样计算过程更简便,动平台可获得更高的精度。

基于虚功原理的序单开链法的优势之处在于,对含 2 个(以上)SKC 的机构,既能求解驱动力,又能求出 SKC 连接处运动副处的支反力;当机构只有 1 个 SKC,应选取杆、副为单元,将全部的运动副约束解除时,由 Newton-Euler 原理与虚功原理导出的 2 种动力学分析方程一致,因此,对含 2 个(以上)SKC 的机构,选取 SKC 为单元,兼有 Newton-Euler 法和虚功原理法的优点。研究结果为该机构的设计和动力学优化奠定了基础。

参考文献:

- [1] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [2] 沈惠平, 吕蒙, 朱小蓉, 等. 一种单自由度 3T1R 并联机构的拓扑设计及其运动学[J]. 中国机械工程, 2019, 30(8): 961-968.
- [3] 杨博彦, 李晓宁, 金国光, 等. 具有整周回转能力的 3T1R 并联机构运动学分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(7):

- 406-416.
- [4]边辉,刘艳辉,梁志成,等. 并联2-RRR/UPRR踝关节康复机器人机构及其运动学[J]. 机器人, 2010, 32(1): 6-12.
- [5]牛雪梅,高国琴,刘辛军,等. 三自由度驱动冗余并联机构动力学建模与试验[J]. 农业工程学报, 2013, 29(16): 31-41.
- [6]陈森,张氢,葛韵斐,等. 2UPR-RRU并联机构及其运动学分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2019, 45(6): 1145-1152.
- [7]BENNEHAR M, CHEMORI A, PIERROT F. A new revised desired compensation adaptive control for enhanced tracking: application to RA-PKMs[J]. Advanced Robotics, 2016, 30(17/18): 1199-1214.
- [8]沈惠平,许可,杨廷力,等. 一种零耦合度且运动解耦的新型3T1R并联操作手2-(RPa3R)₃R的设计及其运动学[J]. 机械工程学报, 2019, 55(5): 53-64.
- [9]刘伟,刘宏昭. 具有2R1T和3R运动模式的并联机构综合[J]. 机械工程学报, 2019, 55(3): 53-63.
- [10]DASGUPTA B, MRUTHYUNJAYA T S. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(8): 1135-1152.
- [11]MOSTASHIRI N, AKBARZADEH A, DHUPIA J, et al. A comprehensive inverse dynamics problem of a Stewart platform by means of Lagrangian formulation[C]//Proceedings of ASME 2017 Dynamic Systems and Control Conference. Tysons: [s. n.], 2017.
- [12]张彦斐,金鹏,宫金良,等. 3-RPS并联机器人粘性摩擦工况动力学建模[J]. 农业机械学报, 2018, 49(9): 374-381.
- [13]杨廷力. 机械系统基本理论: 结构学·运动学·动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.
- [14]丁华锋,祖琪,冯泽民. 基于虚功原理的一种新型锻造操作机主运动机构动力学分析[J]. 机械工程学报, 2016, 52(9): 18-27.
- [15]陈修龙,冯伟明,赵永生. 五自由度并联机器人机构动力学模型[J]. 农业机械学报, 2013, 44(1): 236-243.
- [16]张东胜,许允斗,姚建涛,等. 五自由度混联机器人逆动力学分析[J]. 农业机械学报, 2017, 48(9): 384-391.
- [17]蔡善乐,余新坤,柳天杰,等. 基于螺旋理论的2PRS-2UPS四自由度并联工作台静力学分析[J]. 机械制造, 2011, 49(12): 25-28.
- [18]高征,肖金壮,王洪瑞,等. 一种三自由度串并联结构旋转台的动力学分析[J]. 中国机械工程, 2012, 23(1): 18-21, 38.
- [19]陈子明,刘晓檬,张扬,等. 对称两转一移3-UPU并联机构的动力学分析[J]. 机械工程学报, 2017, 53(21): 46-53.
- [20]贾晓辉,田延岭,张大卫. 基于虚功原理的3-RRPR柔性精密定位工作台动力学分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(1): 68-74.
- [21]尤晶晶,王恪,沈惠平. 具有解析式位置正解的三自由度并联机构逆动力学求解[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2021, 33(4): 83-92.
- [22]曾博雄. 具有符号式位置正解的并联机构拓扑设计、运动学与刚度分析[D]. 常州: 常州大学, 2020.

(责任编辑:谭晓荷)