

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2022.02.007

# 平面高速冲压机构的摆动力完全平衡设计与计算

聂亚彪, 沈惠平, 杨廷力

(常州大学 现代机构学研究中心, 江苏 常州 213164)

**摘要:**首先, 对一单自由度平面八杆冲压机构进行降耦设计, 使得该机构具有解析式位置正解; 其次, 运用团队提出的质量矩替代法, 对该冲压机构进行了摆动力完全平衡设计与分析, 得到机构摆动力完全平衡时各树枝构件的摆动力完全平衡条件; 最后, 基于该条件对机构平衡前后总质心轨迹、总惯性力进行了数值计算与仿真验证。结果表明, 相比于平衡前, 平衡后机构总质心轨迹基本保持恒定、总惯性力趋近于 0, 证明了摆动力完全平衡条件的正确性, 同时, 也为同类机构摆动力完全平衡设计提供了借鉴。

**关键词:**冲压机构; 质量矩替代法; 摆动力完全平衡

**中图分类号:**TH 113

**文献标志码:**A

**文章编号:**2095-0411(2022)02-0053-12

## Design and Calculation for Complete Shaking Force Balancing of Planar Stamping Mechanism

NIE Yabiao, SHEN Huiping, YANG Tingli

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** Firstly, the decoupling design of a single degree of freedom planar eight bar stamping mechanism is carried out, so that the mechanism has an analytical positive position solution; secondly, using the mass moment substitution method proposed by the author's team, the shaking force complete balance design and analysis of the stamping mechanism are carried out, and the conditions of the complete balance of the shaking force of each branch member are obtained when the shaking force of the mechanism is fully balanced; finally, based on the proposed method, the shaking force of each branch member is fully balanced. The results show that, compared with before balancing, the total center of mass trajectory of the mechanism is basically constant, and the total inertial force is close to zero, which proves the correctness of the condition of complete balance of pendulum force, and also provides reference for the design of pendulum force complete balance of similar mechanisms.

**收稿日期:** 2021-12-29。

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51975062, 51375062)。

**作者简介:** 聂亚彪(1995—), 男, 河南周口人, 硕士生。通信联系人: 沈惠平(1965—), E-mail: shp65@126.com

**引用本文:** 聂亚彪, 沈惠平, 杨廷力. 平面高速冲压机构的摆动力完全平衡设计与计算[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2022, 34(2): 53-64.

**Key words:** stamping mechanism; mass-moment substitution method; complete balance of shaking force

未经平衡的机构存在周期变化的摆动力和摆动力矩,会引起机械振动和噪声,并影响工作精度,因此,消除或减小机构惯性力,实现摆动力和摆动力矩的平衡,是高速机构设计中不容忽视的问题<sup>[1-2]</sup>。

目前,连杆机构摆动力完全平衡的 3 种主要研究方法是线性独立矢量法<sup>[3-4]</sup>、质量替代法<sup>[5]</sup>(质量静替代、质量动替代、广义质量替代)、附加杆组法<sup>[6]</sup>。其中,线性独立矢量法可实现一般平面机构的摆动力平衡,但由于其推导过程过于繁琐,一定程度上限制了该方法的应用;质量替代法会加大机构本身质量和构件本身摆动力矩,增加构件内部动应力;附加杆组法是对机构附加其他杆组实现摆动力完全平衡的方法,但不具有一般性。

BERKOF 等<sup>[7]</sup>提出线性独立向量法,它利用机构的矢量闭环方程,得到一组线性无关的向量,并消去矢量方程中有关时间参数,最终得到摆动力完全平衡方程。YE 等<sup>[8]</sup>将构件质量看成是“可流动”的“质量流”,当机构所有构件的质量都流到机架上时,该机构就实现了摆动力完全平衡。OUYANG 等<sup>[9-10]</sup>提出一种调整机构运动学参数(AKP)的方法,实现其摆动力完全平衡的目的。文献<sup>[11-12]</sup>通过优化机构总质心加速度值,使平面串联机械手的摆动力明显下降。

文献<sup>[13-15]</sup>提出了质量矩替代法,其基本思想是:将连枝杆件的质量矩,通过与其相连的移动副或转动副,转化到与其相邻的树枝杆件上,从而将复杂平面机构的动平衡问题,转化为树系统中全部树枝构件的动平衡问题;且给出了含有一个和两个连枝构件回路的质量矩替代公式,以及一杆多副树枝构件的质量矩求解公式,由这些质量矩替代公式,可以构造出平面机构中全部树枝构件摆动力完全平衡计算的条件。该方法的优点有:①相比于质量替代法,无需引入较复杂的广义质量概念以及替代点选择问题;②相比于线性独立矢量法,它无需推导复杂的位置方程;③相比于附加杆组法,无需附加杆组而占据大量空间。因此,质量矩替代法是一种优秀的摆动力完全平衡方法,它可使机构摆动力完全平衡条件的建立过程大大简化,具有物理意义清晰、求解过程简单、计算量小、普遍性好等优点,尤其适合于具有解析式位置正解的平面和空间机构。

文章主要从 3 个方面进行研究:①通过拓扑降耦的方法,设计得到了一种零耦合度的、具有解析式位置正解及输入-输出部分运动解耦性的两滑块高速冲压机构,这种高速冲压机构具有自动防护功能,即主滑块用于冲压,副滑块用于自动辅助推料器;②将“质量矩替代法”应用于具有工业应用背景的、多回路平面机构(含 3 个子运动链-SKC)的摆动力完全平衡设计与计算,为该两滑块高速冲压机的研发奠定技术基础;③验证质量矩替代法在应用于具有解析式位置正解、多回路平面机构摆动力完全平衡设计与计算时所具有的上述优势。

## 1 冲压机构的拓扑优化设计分析

文献<sup>[16]</sup>所述的一种具有两个滑块的平面八杆冲压机构,如图 1(a)所示,该机构为平面Ⅲ级机构,位置正解求解比较复杂,且不具有位置解析解。根据机构降耦设计方法<sup>[17]</sup>,将机构中的运动副 B,运动副 C 合并,即可将原机构的耦合度从 1 变为 0,从而使得改进机构具有正向位置解析解,改进设计后的机构简图,如图 1(b)所示。

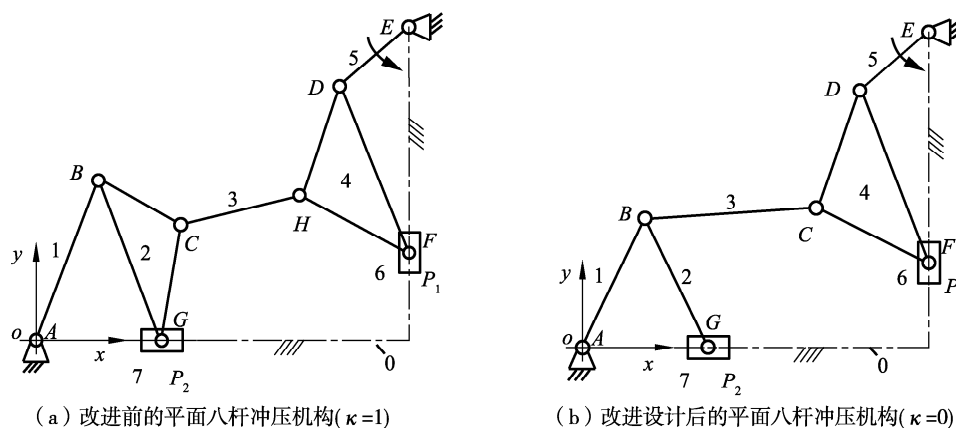


图1 一种两滑块高速冲压机构的优化

Fig.1 Optimization of a high speed stamping mechanism with two sliders

由图 1(b)可知,改进设计后的高速冲压机构主要由机架 0,构件 1~构件 7 组成,其中,杆组(构件 4~构件 6)(构件 1~构件 3)(构件 2~构件 7)为 3 个平面 II 级杆组。移动副  $P_1$ (主滑块)为主冲压头,移动副  $P_2$ (副滑块)为辅助推料器,其余 7 个关节(A~G)均为转动副。该机构的拓扑分析为:

### 1) 自由度分析

该机构包含 3 个独立回路,即  $E-D-F$ ,  $C-B-A$ ,  $B-G-P_2$ , 每个回路的独立位移方程数  $\xi_{L_i} = 3$  ( $i=1, 2, 3$ ), 全周自由度公式为<sup>[18]</sup>

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{i=1}^3 \xi_{L_i} = 10 - (3 + 3 + 3) = 1$$

因此,机构仅需要一个原动件,例如,可取杆 5 为驱动曲柄,当冲压机头  $P_1$  向下冲压时,辅助推料器  $P_2$  完成自左向右的冲压料自动推送,从而完成自动冲压。这样,避免了人工送料,具有很好的防护功能,保证了操作人员人身安全。

### 2) 耦合度计算

$E-D-F$ ,  $C-B-A$ ,  $B-G-P_2$  3 个回路的约束度分别为:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 4 - 1 - 3 = 0 \\ \Delta_2 &= \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 3 - 0 - 3 = 0 \\ \Delta_3 &= \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L_3} = 3 - 0 - 3 = 0 \end{aligned}$$

因此,机构的耦合度为

$$k_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 |\Delta_j| = 0 \quad (i = 1 \sim 3)$$

由上可知,改进后的机构包括 3 个子运动链(SKC),即  $SKC_1$ ,  $SKC_2$ ,  $SKC_3$ , 耦合度均为 0。因此,机构的耦合度为 0,其位置正解具有解析解,为接下来的该机构动平衡和动力学计算提供了极大方便。

## 2 机构摆动力完全平衡计算

### 2.1 质量矩替代法基本概念及求解步骤

整个机构可看成是由树枝构件和连枝构件组成的完整树系统。连枝构件是指连接两个支链与机

架,或者连接两个独立的开链的构件。将整个机构中所有的连枝构件的质量矩,都由与之相邻的树枝构件的附加质量矩替代后,此时,机构中所有回路拆解成只含有树枝构件组成的支链,再将各个支链的质量矩加起来,即可得到整个机构的质量矩。连枝构件的存在,使得计算多回路机构的总质量矩,转化为求解各个支链中树枝构件的总质量矩。该冲压机构包含 3 个基本回路,因此,含有 3 个连枝构件。除连枝构件外,其他都为树枝构件。机构摆动力完全平衡条件的求解步骤见文献[14]。

## 2.2 摆动力完全平衡条件求解

如图 2 所示,各构件质量为  $m_i$  ( $i=1\sim 7$ );相应的质心位置参数为  $p_i, q_i$  ( $i=1\sim 7$ );杆长分别为  $AB=l_1, BG=l_2, BC=l_3, DC=l_4, DF=l_5, CF=l_6, DE=l_7$ ;构件 1~构件 7 的质心为  $S_i$  ( $i=1\sim 7$ );各个构件的配重质量及其参数为  $m_i^*, p_i^*, q_i^*$  ( $i=1\sim 7$ )。

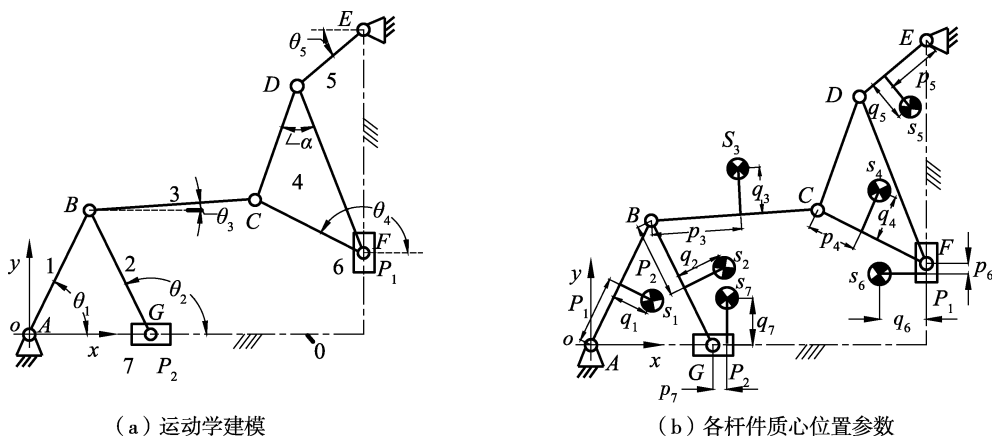


图 2 坐标系建立及参数标注

Fig.2 Setting up coordinate system and parameter marking

### 2.2.1 可完全平衡判定以及树系统划分

由图 2 可知,该机构中每一构件都存在一条仅由转动副组成的通路连接到机架,即可判定该机构可用配重法实现摆动力完全平衡。

树系统划分:根据 2.1 节所述的连枝构件、树枝构件选取原则,选取构件 3,构件 6,构件 7 为连枝构件,构件 1,构件 2,构件 4,构件 5 为树枝构件。

### 2.2.2 连枝构件质量矩的附加质量矩替代

#### 1) 连枝构件 3

由图 1(b)可知,连枝构件 3 左边通过复合铰链  $R_B$ ,分别与树枝构件 1、树枝构件 2 联接;其右边通过转动副  $R_C$  与多副构件 4 联接,因此,其质量矩替代过程如下。

连枝构件 3 的质心( $S_3$ )位置表示为

$$\begin{bmatrix} x_{S_3} \\ y_{S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{bmatrix} + q_3 \begin{bmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

由图 2 易得以下运动学关系:

$$\begin{cases} \sin\theta_3 = \frac{1}{l_3}(y_C - y_B) \\ \cos\theta_3 = \frac{1}{l_3}(x_C - x_B) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_B = x_A + l_1 \cos\theta_1 \\ y_B = y_A + l_1 \sin\theta_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_B = x_G + l_2 \cos \theta_2 \\ y_B = y_G + l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x_C = x_F + l_6 \cos \theta_4 \\ y_C = y_F + l_6 \sin \theta_4 \end{cases} \quad (5)$$

将式(3)、式(4)、式(5),代入式(2)得:

$$\begin{bmatrix} x_{S_3} \\ y_{S_3} \end{bmatrix} = [\delta]_B^R \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + l_1 [\delta]_B^R \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} + [\delta]_C^R \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} + l_6 [\delta]_C^R \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} x_{S_3} \\ y_{S_3} \end{bmatrix} = [\delta]_B^R \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} + l_2 [\delta]_B^R \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} + [\delta]_C^R \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} + l_6 [\delta]_C^R \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中:  $[\delta]_B^R$  为连枝构件 3 通过 B 点的 R 副作用在树枝构件 1、构件 2 上的附加质量矩系数矩阵,

$[\delta]_B^R = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} p'_3 & q_3 \\ -q_3 & p'_3 \end{bmatrix}$ ,  $p'_3 = l_3 - p_3$ ;  $[\delta]_C^R$  为连枝构件 3 通过 C 点的 R 副作用在树枝构件 4 上的附加质

量矩系数矩阵,且  $[\delta]_C^R = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} p_3 & -q_3 \\ q_3 & p_3 \end{bmatrix}$ 。

由式(6)、式(7)可知,连枝构件 3 的质心参数可由杆件 1、杆件 4 或杆件 2、杆件 4 上的坐标参数表示。因此,连枝构件 3 的质量矩可表示为:

$$m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3} \\ y_{S_3} \end{bmatrix} = m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(1)} \\ y_{S_3}^{(1)} \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(4)} \\ y_{S_3}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3} \\ y_{S_3} \end{bmatrix} = m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(2)} \\ y_{S_3}^{(2)} \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(4)} \\ y_{S_3}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(1)} \\ y_{S_3}^{(1)} \end{bmatrix}$ ,  $m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(2)} \\ y_{S_3}^{(2)} \end{bmatrix}$ ,  $m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(4)} \\ y_{S_3}^{(4)} \end{bmatrix}$  分别表示连枝构件 3 作用在树枝构件 1、树枝构件 2、树枝构件 4 上

的附加质量矩。其值分别为:

$$m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(1)} \\ y_{S_3}^{(1)} \end{bmatrix} = m_3 [\delta]_B^R \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + m_3 [\delta]_B^R l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(2)} \\ y_{S_3}^{(2)} \end{bmatrix} = m_3 [\delta]_B^R \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} + m_3 [\delta]_B^R l_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(4)} \\ y_{S_3}^{(4)} \end{bmatrix} = m_3 [\delta]_C^R \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} + m_3 [\delta]_C^R l_6 \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

由式(8)、式(9)可知,连枝构件 3 的质量矩可由其相邻树枝构件 1 和相邻树枝构件 4,或树枝构件 2 和树枝构件 4 的附加质量矩替代,并且附加质量矩表达式不包含连枝构件 3 的位置参数  $\theta_3$ 。也因此可知,对于含有复合铰链的机构,在保证机构总质量矩不变的前提下,连枝构件的质量矩替代可有多种选择方案。

## 2) 连枝构件 6

由图 2 可知,连枝构件 6 通过转动副  $R_F$  与多副树枝构件 4 相连。因此,其质量矩替代过程为:

连枝构件 6 的质心( $S_6$ )位置表示为

$$\begin{bmatrix} x_{S_6} \\ y_{S_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_6 \\ -q_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

由图 1(b)可知,有运动学关系

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} - l_6 [\delta]_F^R \begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中 $[\delta]_F^R$ 为连枝构件 6 通过 F 点 R 副作用在树枝构件 4 上的附加质量矩系数矩阵,且 $[\delta]_F^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

连枝构件 6 的质量矩为

$$m_6 \begin{bmatrix} x_{S_6} \\ y_{S_6} \end{bmatrix} = m_6 \begin{bmatrix} x_{S_6}^{(4)} \\ y_{S_6}^{(4)} \end{bmatrix} = m_6 \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} - m_6 l_6 [\delta]_F^R \begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \end{bmatrix} + m_6 \begin{bmatrix} -q_6 \\ -p_6 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 $m_6 \begin{bmatrix} x_{S_6}^{(4)} \\ y_{S_6}^{(4)} \end{bmatrix}$ 为连枝构件 6 作用在树枝构件 4 上的附加质量矩。

将式(13)、式(14)代入式(15)可知,连枝构件 6 的质量矩可由作用在树枝构件 4 上的附加质量矩替代,并且附加质量矩表达式不包含连枝构件 6 的位移参数。

### 3) 连枝构件 7

类比于连枝构件 6 的质量矩替代公式,易得到连枝构件 7 的质量矩,可由作用在连枝构件 2 上的附加质量矩替代,并且附加质量矩表达式中,不含有连枝构件 7 的位移参数为

$$m_7 \begin{bmatrix} x_{S_7} \\ y_{S_7} \end{bmatrix} = m_7 \begin{bmatrix} x_{S_7}^{(2)} \\ y_{S_7}^{(2)} \end{bmatrix} = m_7 \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} + m_7 l_2 [\delta]_G^R \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} + m_7 \begin{bmatrix} p_7 \\ q_7 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中 $m_7 \begin{bmatrix} x_{S_7}^{(2)} \\ y_{S_7}^{(2)} \end{bmatrix}$ 为连枝构件 7 作用在树枝构件 2 上的附加质量矩; $[\delta]_G^R$ 为连枝构件 7 通过 G 点 R 副作用在树枝构件 2 上的附加质量矩系数矩阵,且 $[\delta]_G^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

## 2.2.3 建立全部树枝构件的摆动力完全平衡条件

### 1) 树枝构件 4

树枝构件 4 分别通过转动副  $R_F$  和转动副  $R_C$ ,与连枝构件 6 和连枝构件 3 相连,故树枝构件 4 受到的质量矩分别有:

①连枝构件 3、连枝构件 6 分别作用在树枝构件 4 上的附加附加质量矩,分别见式(12)、式(15);

②树枝构件 4 本身及其配重的质量矩分别为:

$$\begin{bmatrix} m_4 x_{S_4} \\ m_4 y_{S_4} \end{bmatrix} = m_4 \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} p_4 & -q_4 \\ q_4 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} m_4^* x_{S_4}^* \\ m_4^* y_{S_4}^* \end{bmatrix} = m_4^* \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + m_4^* \begin{bmatrix} p_4^* & -q_4^* \\ q_4^* & p_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

同时,由式(12)、式(15)、式(17)、式(18),可知,树枝构件4的总质量矩为

$$\begin{bmatrix} m_4 x_{S_4} \\ m_4 y_{S_4} \end{bmatrix} = m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(4)} \\ y_{S_3}^{(4)} \end{bmatrix} + m_6 \begin{bmatrix} x_{S_6}^{(4)} \\ y_{S_6}^{(4)} \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} x_{S_4} \\ y_{S_4} \end{bmatrix} + m_4^* \begin{bmatrix} x_{S_4}^* \\ y_{S_4}^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

当摆动力完全平衡时,机构的总质量矩应为常数,即与构件4的角位置 $\theta_4$ 变化无关,故应使式(19)

中关于 $\begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \end{bmatrix}$ 的系数矩阵恒为0,因此,树枝构件4摆动力完全平衡条件为

$$\begin{cases} m_3 l_6 p_3 / l_3 - m_6 l_6 + m_4 p_4 + m_4^* p_4^* = 0 \\ m_3 l_6 q_3 / l_3 + m_4 q_4 + m_4^* q_4^* = 0 \end{cases} \quad (20)$$

## 2) 树枝构件5

由图2可知,树枝构件5并没有直接与连枝构件相连,但树枝构件5通过转动副 $R_D$ 与连枝构件4联接,其中,树枝构件4相当于树枝构件5的子树系统,故树枝构件5受到的质量矩分别有:

①连枝构件3作用在树枝构件5上的附加质量矩为

$$m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(5)} \\ y_{S_3}^{(5)} \end{bmatrix} = m_3 [\delta]_C^R \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = m_3 [\delta]_C^R \begin{bmatrix} x_E + l_7 \cos\theta_5 \\ y_E + l_7 \sin\theta_5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

②连枝构件6作用在树枝构件5上的附加质量矩为

$$m_6 \begin{bmatrix} x_{S_6}^{(5)} \\ y_{S_6}^{(5)} \end{bmatrix} = m_6 [\delta]_F^R \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = m_6 [\delta]_F^R \begin{bmatrix} x_E + l_7 \cos\theta_5 \\ y_E + l_7 \sin\theta_5 \end{bmatrix} \quad (22)$$

③树枝构件4及其配重对树枝构件5的附加质量矩

$$(m_4 + m_4^*) \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = (m_4 + m_4^*) \begin{bmatrix} x_E + l_7 \cos\theta_5 \\ y_E + l_7 \sin\theta_5 \end{bmatrix} \quad (23)$$

④树枝构件5及其配重质量矩,分别为:

$$\begin{bmatrix} m_5 x_{S_5} \\ m_5 y_{S_5} \end{bmatrix} = m_5 \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} + m_5 \begin{bmatrix} p_5 & -q_5 \\ q_5 & p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 \\ \sin\theta_5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} m_5^* x_{S_5}^* \\ m_5^* y_{S_5}^* \end{bmatrix} = m_5^* \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} + m_5^* \begin{bmatrix} p_5^* & -q_5^* \\ q_5^* & p_5^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_5 \\ \sin\theta_5 \end{bmatrix} \quad (25)$$

同时,由式(21)~式(25)可知,树枝构件5的总质量矩为

$$\begin{bmatrix} m_5 x_{S_5} \\ m_5 y_{S_5} \end{bmatrix} = m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(5)} \\ y_{S_3}^{(5)} \end{bmatrix} + m_6 \begin{bmatrix} x_{S_6}^{(5)} \\ y_{S_6}^{(5)} \end{bmatrix} + (m_4 + m_4^*) \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + m_5 \begin{bmatrix} x_{S_5} \\ y_{S_5} \end{bmatrix} + m_5^* \begin{bmatrix} x_{S_5}^* \\ y_{S_5}^* \end{bmatrix} \quad (26)$$

当摆动力完全平衡时,机构的总质量矩应为常数,即与构件5的角位置 $\theta_5$ 变化无关,故应使式(26)

中关于 $\begin{bmatrix} \cos\theta_5 \\ \sin\theta_5 \end{bmatrix}$ 的系数矩阵恒为0,因此,树枝构件5的摆动力完全平衡条件为

$$\begin{cases} (\frac{m_3 p_3}{l_3} + m_6 + m_4 + m_4^*) l_7 + m_5 p_5 + m_5^* p_5^* = 0 \\ \frac{m_3 q_3 l_7}{l_3} + m_5 q_5 + m_5^* q_5^* = 0 \end{cases} \quad (27)$$

## 3) 树枝构件 2

由图 2 所示, 树枝构件 2 分别与连枝构件 3、连枝构件 7 通过  $R_B, R_G$  直接相连, 故树枝构件 2 受到的质量矩分别有:

①连枝构件 7 作用在树枝构件 2 上的附加质量矩, 见式(16);

②树枝构件 2 及其配重质量的质量矩, 见式(28)、式(29);

$$\begin{bmatrix} m_2 x_{S_2} \\ m_2 y_{S_2} \end{bmatrix} = m_2 \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} p_2 & -q_2 \\ q_2 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} m_2^* x_{S_2}^* \\ m_2^* y_{S_2}^* \end{bmatrix} = m_2^* \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} + m_2^* \begin{bmatrix} p_2^* & -q_2^* \\ q_2^* & p_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

同时, 由式(16)、式(28)、式(29), 树枝构件 2 的总质量矩为

$$\begin{bmatrix} m_2 x_{S_2} \\ m_2 y_{S_2} \end{bmatrix} = m_7 \begin{bmatrix} x_{S_7}^{(2)} \\ y_{S_7}^{(2)} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} x_{S_2} \\ y_{S_2} \end{bmatrix} + m_2^* \begin{bmatrix} x_{S_2}^* \\ y_{S_2}^* \end{bmatrix} \quad (30)$$

当摆动力完全平衡时, 机构的总质量矩应为常数, 即与构件 2 的角位置  $\theta_2$  变化无关, 故应使式(30)

中关于  $\begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix}$  的系数矩阵恒为 0。因此, 树枝构件 2 摆动力完全平衡条件为

$$\begin{cases} m_7 l_2 + m_2 p_2 + m_2^* p_2^* = 0 \\ m_2 q_2 + m_2^* q_2^* = 0 \end{cases} \quad (31)$$

## 4) 树枝构件 1

由图 2 可知, 树枝构件 1 通过复合铰链  $R_B$  与连枝构件 3、树枝构件 2 联接, 其中, 树枝构件 2 相当于树枝构件 1 的子树系统树, 故树枝构件 1 受到的质量矩作用, 见式(32)~式(37)。

①连枝构件 7 作用在树枝构件 1 上的附加质量矩为

$$m_7 \begin{bmatrix} x_{S_7}^{(1)} \\ y_{S_7}^{(1)} \end{bmatrix} = m_7 [\delta]_G^R \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = m_7 [\delta]_G^R \begin{bmatrix} x_A + l_1 \cos\theta_1 \\ y_A + l_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

②连枝构件 3 作用在树枝构件 1 的附加质量矩, 见式(10);

③树枝构件 2 及其配重对树枝构件 1 的附加质量矩为

$$(m_2 + m_2^*) \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = (m_2 + m_2^*) \begin{bmatrix} x_A + l_1 \cos\theta_1 \\ y_A + l_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

④树枝构件 1 本身及其配重质量矩为:

$$\begin{bmatrix} m_1 x_{S_1} \\ m_1 y_{S_1} \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} p_1 & -q_1 \\ q_1 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$



$$\begin{bmatrix} m_1^* x_{S_1}^* \\ m_1^* y_{S_1}^* \end{bmatrix} = m_1^* \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + m_1^* \begin{bmatrix} p_1^* & -q_1^* \\ q_1^* & p_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

同时,由式(10)、式(32)~式(35)可知,树枝构件1的总质量矩为

$$\begin{bmatrix} m_1 x_{S_1} \\ m_1 y_{S_1} \end{bmatrix} = m_7 \begin{bmatrix} x_{S_7}^{(1)} \\ y_{S_7}^{(1)} \end{bmatrix} + (m_2 + m_2^*) \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + m_3 \begin{bmatrix} x_{S_3}^{(1)} \\ y_{S_3}^{(1)} \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} x_{S_1} \\ y_{S_1} \end{bmatrix} + m_1^* \begin{bmatrix} x_{S_1}^* \\ y_{S_1}^* \end{bmatrix} \quad (36)$$

当摆动力完全平衡时,机构的总质量矩应为常数,即与构件1的角位置 $\theta_1$ 变化无关,故应使式(36)中关于 $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix}$ 的系数矩阵恒为0,即树枝构件1的摆动力完全平衡条件为

$$\begin{cases} (\frac{m_3(l_3 - p_3)}{l_3} + m_7 + m_2 + m_2^*)l_1 + m_1 p_1 + m_1^* p_1^* = 0 \\ \frac{m_3 q_3}{l_3} l_1 - m_1 q_1 - m_1^* q_1^* = 0 \end{cases} \quad (37)$$

#### 2.2.4 数值求解

为简化模型,设冲压机构中各根杆件质量均匀分布,具体参数为:

1)各杆件长度

$l_1 = l_2 = 109 \text{ mm}, l_3 = 170 \text{ mm}, l_4 = 80 \text{ mm}, l_5 = 117 \text{ mm}, l_6 = 80 \text{ mm}, l_7 = 40 \text{ mm}$ 。

2)各杆件质心位置参数

$p_1^0 = 48 \text{ mm}, p_2^0 = 61 \text{ mm}, p_3^0 = 60 \text{ mm}, p_4^0 = 24 \text{ mm}, q_4^0 = 25 \text{ mm}, p_5^0 = 20 \text{ mm}$ 。

3)各杆件质量及配重质量

$m_1^0 = m_2^0 = 0.021 \text{ kg}, m_3^0 = 0.031 \text{ kg}, m_4^0 = 0.056 \text{ kg}, m_5^0 = 0.009 \text{ kg}, m_6^0 = m_7^0 = 0.048 \text{ kg}$ 。

4)其他参数

多副杆4为等腰直角三角形, $\alpha = 45^\circ$ ;驱动构件5作匀速转动,输入角速度为 $\omega_1 = 0.1\pi \text{ rad/s}$ 。

因连枝构件的质量矩已经被相邻构件附加质量矩替代,故对于连枝构件无需添加配重。

将上述数值参数分别代入式(20)、式(27)、式(31)、式(37),可分别求得树枝构件4、树枝构件5、树枝构件2、树枝构件1附加配重参数为:

$$\begin{cases} m_4^* p_4^* = 1.62 \\ m_4^* q_4^* = -1.4 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} m_5^* p_5^* = -(4.8 + 40m_4^*) \\ m_5^* q_5^* = 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} m_2^* p_2^* = -6.5 \\ m_2^* q_2^* = 0 \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} m_1^* p_1^* = -(10.7 + 109m_2^*) \\ m_1^* q_1^* = 0 \end{cases} \quad (41)$$

对比上述各树枝构件配重参数值,可得:①由式(39)、式(41)可知,树枝构件2、树枝构件4分别作为树枝构件1、树枝构件5的子树系统,它们的配重参数将会影响到树枝构件1、树枝构件5总质量矩大小;②每个树枝构件一般只需要两个配重参数( $m_i^*, p_i^*$ ),就可以确定平衡效果,也表明提高机构中杆件的加工精度,可降低结构尺寸对惯性力平衡的影响,从而使平衡条件变得简单。

### 3 平衡前后机构总质心、总惯性力对比分析

为验证冲压机构动平衡效果——总质心静止不动或总质心位移变化缓慢,给出平衡前后机构总质心、总惯性力对比分析。

### 3.1 平衡前总质心位移变化以及总惯性力求解

改进设计后的冲压机构的位置正解,可转化为 3 个 SKC 各自位置正解的求解。

#### 1) SKC<sub>1</sub> 的求解

由 E 点的坐标  $E(m, n)$ , 易知 D 点, F 点坐标分别为:  $D(m - l_7 \cos \theta_5, n - l_7 \sin \theta_5)$ ;  $F(m, D_y + l_5 \sin(\theta_4 - \alpha))$ 。

#### 2) SKC<sub>2</sub> 的求解

易知 C 点、B 点的坐标分别为:  $C(D_x - l_4 \sin \theta_4, D_y + l_4 \cos \theta_4)$ ;  $B(l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1)$ 。

#### 3) SKC<sub>3</sub> 的求解

易知 G 点、A 点的坐标分别为:  $G(B_x - l_2 \cos \theta_2, 0)$ ;  $A(0, 0)$ 。

于是,可求出各个杆件的质心坐标分别为:

$$\begin{cases} x_{S_1} = x_A + p_1^0 \cos \theta_1 \\ y_{S_1} = y_A + p_1^0 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} x_{S_2} = x_B - p_2^0 \cos \theta_2 \\ y_{S_2} = y_B - p_2^0 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} x_{S_3} = x_B + p_3^0 \cos \theta_3 \\ y_{S_3} = x_B - p_3^0 \sin \theta_3 \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} x_{S_4} = \frac{1}{3}(x_C + x_D + x_F) \\ y_{S_4} = \frac{1}{3}(y_C + y_D + y_F) \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} x_{S_5} = x_E - p_5^0 \cos \theta_5 \\ y_{S_5} = y_E - p_5^0 \sin \theta_5 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} x_{S_6} = x_F \\ y_{S_6} = y_F \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} x_{S_7} = x_G \\ y_{S_7} = y_G \end{cases} \quad (48)$$

式中:  $p_i^0, q_i^0 (i = 1, 2, 3, 5)$  分别为各构件平衡前质心位置参数;  $\theta_5$  为驱动角。进一步, 易知,  $\theta_4 = \arccos\left(\frac{l_7 \cos \theta_5}{-l_5}\right) + \frac{\pi}{4}$ ;  $\theta_1 = \arctan\left(\frac{x_B}{y_B}\right)$ ;  $\theta_2 = 180 - \arcsin\left(\frac{y_B}{l_2}\right)$ ;  $\theta_3 = \arccos\left(\frac{x_C - x_B}{l_3}\right)$ 。

因上述各构件的质心位置均为解析解,其加速度计算十分容易。由式(42)~式(48)易得机构平衡前总质心变化,如图 3(a)、图 3(b)、图 3(c)中实线所示。总惯性力在横、纵坐标方向的变化,如图 4(a)、图 4(b)中实线所示。

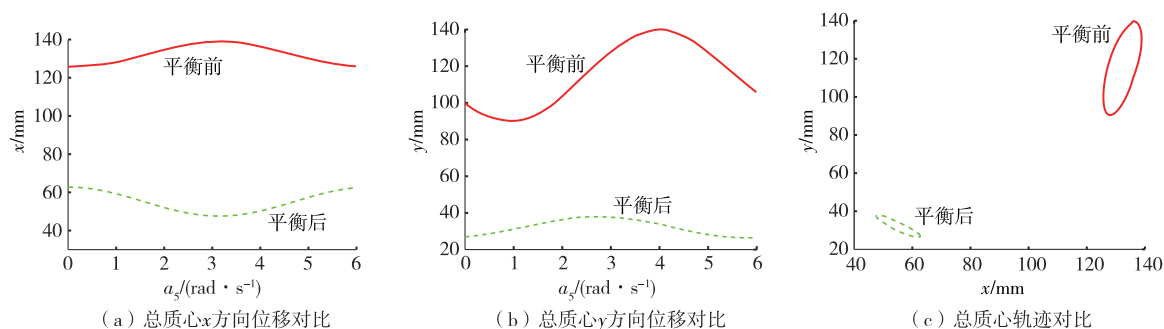


图 3 机构平衡前后总质心坐标及轨迹变化

Fig.3 The change of total center of mass coordinates and track before and after mechanism balancing

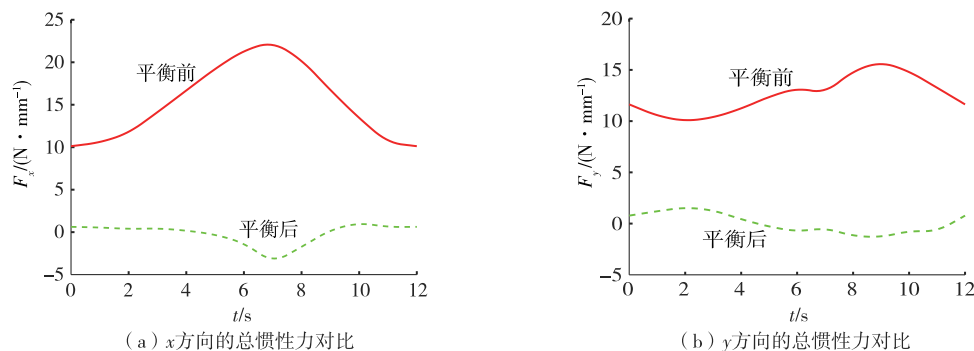


图4 机构平衡前后的机构惯性力

Fig.4 Inertia force of mechanism before and after balancing

### 3.2 平衡后总质心位移变化以及总惯性力求解

树枝构件加上配重之后,原先的质心参数发生变化,而连枝构件3、连枝构件6、连枝构件7的质心不变。基于2.2.4节配重参数计算,求得各树枝构件加上配重后新的质心位置为  $p_1^* = 50 \text{ mm}$ ,  $p_2^* = 50 \text{ mm}$ ,  $p_4^* = 100 \text{ mm}$ ,  $p_5^* = 100 \text{ mm}$ ,由于各个杆件为均匀杆,则  $q_i^* = 0 (i=1,2,4,5)$ 。将其代入到式(38)~式(41),求得

$$\begin{cases} p_i = \frac{m_i p_i^0 + m_i^* p_i^*}{m_i + m_i^*} \\ q_i = \frac{m_i q_i^0 + m_i^* q_i^*}{m_i + m_i^*} \end{cases} \quad (49)$$

式中  $p_i, q_i (i=1,2,4,5)$  为构件1、构件2、构件4、构件5加配重后新的质心位置参数。

基于式(49),可求得加配重之后,各树枝构件新的质心坐标为:

$$\begin{cases} x_{S_1} = x_A - p_1 \cos \theta_1 \\ y_{S_1} = y_A - p_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} x_{S_2} = x_B - p_2 \cos \theta_2 \\ y_{S_2} = y_B - p_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} x_{S_4} = x_F - p_4 \cos \theta_4 \\ y_{S_4} = y_F - p_4 \sin \theta_4 \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} x_{S_5} = x_A + p_5 \cos \theta_5 \\ y_{S_5} = y_A + p_5 \sin \theta_5 \end{cases} \quad (53)$$

将式(50)~式(53)与平衡前的连枝构件质心方程(44)、方程(47)、方程(48)一起,计算出加速度后,由Matlab计算,可分别得到平衡后机构总质心变化轨迹,如图3(a)、图3(b)、图3(c)虚线所示。总惯性力在横、纵坐标方向的变化,如图4(a)、图4(b)中虚线所示。

### 3.3 平衡前后总质心位移及总惯性力对比变化

由图3(a)、图3(b)可以看出,平衡前,机构总质心在  $x, y$  方向都有较大的位移波动,特别是在纵坐标方向上;平衡后,机构总质心位移波动已很小。由图3(c)可以看出,平衡前后质心轨迹变化较大,平衡前质心轨迹所围成的面域,要远远大于平衡之后。因此,平衡后机构在  $x, y$  方向上的位移均有明显的减小。同时,平衡后的质心位置更接近机架的同时,面域更小,几乎接近于0,表明平衡后质心位置更加稳定。

由图4可以看出,平衡前,机构在  $x, y$  方向的总惯性力都有较大波动,加以适当的配重参数后,在同样的转速运动下,机构  $x, y$  方向总惯性力都几乎接近于0。因此,平衡后的总惯性力波动也较小,基本达到了摆动力完全平衡,从而也验证了基于质量矩替代法的摆动力完全平衡计算的正确性,为该两滑块高速冲压机的研发奠定了理论依据。

## 4 结 论

1)将质量矩替代法推广应用于含多副杆件、多个复杂 SKC 平面八杆冲压机构的动平衡设计与计算,通过拓扑降耦,使其耦合度降为 0。该机构具有解析式位置正解,无需通过一维搜索,即可精确求解各构件的位置及加速度值,为机构的动平衡计算分析提供了极大方便。

2)用质量矩替代法导出了高速冲压机构的摆动力平衡设计与计算公式,计算得到其平衡配重质量的位置参数。计算表明:平衡后总质心位置变化范围很小, $x, y$  方向的总惯性力几乎为 0,高速冲压机构较好地实现了摆动力平衡效果,证明了该方法的有效性。

## 参考文献:

- [1]DAN Z, BIN W. Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots[M]. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [2]CHAUDHARY H, SAHA S K. Dynamics of closed-loop systems[M]//Dynamics and Balancing of Multibody Systems. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 45-86.
- [3]张琳. 用线性独立矢量分析连杆机构的平衡[J]. 机械设计与制造, 2005(3): 14-15.
- [4]吴焱, 曹巨江, 燕卫亮. 基于线性独立矢量法的曲柄群驱动机构摆动力平衡分析[J]. 制造业自动化, 2015, 37(9): 102-105.
- [5]唐锡宽, 金德闻. 机械动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985: 275-294.
- [6]VAN DER WIJK V, HERDER J L. Dynamic balancing of clavel's delta robot[M]//Computational Kinematics. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009: 315-322.
- [7]BERKOF R S, LOWEN G G. A new method for completely force balancing simple linkages[J]. Journal of Engineering for Industry, 1969, 91(1): 21-26.
- [8]YE Z, SMITH M R. Contribution to the theory of full force balancing of planar linkages[C]. [S. l. : s. n. ], 1987: 519-522.
- [9]OUYANG P R, LI Q, ZHANG W J. Integrated design of robotic mechanisms for force balancing and trajectory tracking[J]. Mechatronics, 2003, 13(8/9): 887-905.
- [10]OUYANG P R, ZHANG W J. Force balancing of robotic mechanisms based on adjustment of kinematic parameters [J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(3): 433-440.
- [11]BRIOT S, ARAKELIAN V, SAUVESTRE N, et al. Shaking forces minimization of high-speed robots via an optimal motion planning[C]. [S. l. ]: ROMANSY 18 Robot Design, Dynamics and Control, 2010.
- [12]GENG J, ARAKELIAN V. Design of partially balanced planar 5R symmetrical parallel manipulators via an optimal motion planning[C]. [S. l. ]: Advances in Mechanism and Machine Science, 2019.
- [13]杨廷力, 张明. 平面连杆机构摆动力和摆动力矩完全平衡的一般理论[J]. 机械工程学报, 1992, 28(6): 99-102.
- [14]杨廷力. 机械系统基本理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996: 272-279.
- [15]吴焱, 曹巨江, 燕卫亮, 等. 曲柄群驱动机构的惯性力平衡分析[J]. 机械强度, 2017, 39(1): 92-99.
- [16]BAIGUNCHEKOV Z, IZMAMBETOV M, BAIGUNCHEKOV N. Structural and kinematic synthesis of a planar parallel mechanism with two rectilinear moving end-effectors[C]. Tianjin: [s. n. ], 2014: 7-8.
- [17]沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23): 102-113.
- [18]杨廷力, 刘安心, 罗玉峰. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 52-121.

(责任编辑:谭晓荷)