

doi: 10.3969/j.issn.2095-0411.2022.04.006

基于广义变分原理的装配/残余效应 下的结构力学特性分析

谭邹卿¹, 石晓灏², 蒋学东¹, 班书昊¹

(1. 常州大学 机械与轨道交通学院, 江苏 常州 213164; 2. 常州大学 生物医学工程与健康科学研究院,
江苏 常州 213164)

摘要: 基于能量法研究了装配/残余效应下结构的力学特性。采用拉格朗日乘法, 构造考虑装配/残余效应的新泛函, 求解该新泛函的极值问题, 并利用矩阵理论获得了超静定结构支座反力或内力的通解。对比了空腹桁架、曲杆以及层合梁 3 种实例, 验证了该模型的有效性。结果表明该方法对求解装配/残余效应下各种超静定结构力学特性具有良好的通用性。

关键词: 广义变分原理; 装配效应; 残余效应; 超静定; 拉格朗日乘法

中图分类号: O 341

文献标志码: A

文章编号: 2095-0411(2022)04-0043-09

Assembly/Residual Effects on Mechanical Behaviors of Structures Based on Generalized Variational Principles

TAN Zouqing¹, SHI Xiaohao², JIANG Xuedong¹, BAN Shuhao¹

(1. School of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213164, China; 2. Institute of Biomedical Engineering and Health Sciences, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: An energy method for assembly/residual effects on mechanical behaviors of structures is presented. A new functional considering assembly/residual effects is given according to Lagrange multiplier method. Solving the extremal problem of the new functional, a matrix form of general solutions for support/internal forces of statically indeterminate structures is obtained by using matrix theory. Compared with three types of structures including the vierendeel truss, the curved bar, and the bilayer cantilever beam, the accuracy of the present model is confirmed. The results show that this method has the good versatility to solve the mechanical behaviors of various statically indeterminate structures

收稿日期: 2021-12-07。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11602036); 江苏省青蓝工程资助项目(苏教师[2020]10 号)。

作者简介: 谭邹卿(1983—), 男, 四川广安人, 博士, 副教授。E-mail: zqtan@cczu.edu.cn

引用本文: 谭邹卿, 石晓灏, 蒋学东, 等. 基于广义变分原理的装配/残余效应下的结构力学特性分析[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2022, 34(4): 43-51.

considering assembly/residual effects.

Key words: generalized variational principles; assembly effect; residual effect; statically indeterminate; Lagrange multiplier method

为了满足工程中各种功能的需求,需要设计各种各样的结构。例如,由于具有刚度高、结构轻、尺寸稳定性好等优点,桁架为工程中一种常用的结构^[1-3]。另外,多层复合结构已广泛应用于机械、光学、电气和化学器件等领域^[4-5]。然而,在实际工程中不可避免地会出现制造误差、安装误差、测量误差等因数,使得结构产生初始内力。初始内力的存在,必然会影响到结构的可靠性,甚至可能导致工程事故^[6]。杆件长度的制造误差使得空间桁架产生一定的初始应力,这些未知的应力可能会引起局部杆件的过早屈曲,甚至造成整个桁架出现累积式坍塌^[7]。对于多层复合结构,当制备和工作过程中存在表面应力、外延生长错配、温度变化、扩散应变等因数时^[8-11],由于涂层与基底存在失配应变,造成涂层-基底结构存在残余应力,进而引起多层复合结构的弯曲、剥离、脱层、屈曲以及断裂等行为^[12-16]。因此,对装配/残余效应下结构力学特性的研究十分必要。

考虑装配/残余效应的结构是超静定的,其力学特性的研究是结构优化设计的一个关键问题。已有大量的方法研究装配/残余效应下结构力学特性,如连续介质理论^[14,17-20], Monte Carlo 方法 (MCM)^[21-23]以及有限元法 (FEM)^[24]等。FURUYA^[17]建立了一个解析模型,研究了杆件长度失配对空间结构灵敏度的影响。利用半解析方法, KARPOV 等^[18]研究了初始应力对规则晶格结构力学特性的影响。余俊等^[6]阐述了考虑制造和安装误差对桁架结构各杆件的可靠性影响,并给出了修正的可靠性指标的计算方法。利用 Monte Carlo 方法, SHEIDAI 等^[23]研究了杆件长度随机分布对双层空间结构承载能力、坍塌以及可靠性的影响。SMITH 等^[24]利用有限元法求解了节点位置不确定条件下桁架结构的内力和位移。

此外,对层合结构残余效应的研究也广受关注。TIMOSHENKO^[25]利用力和力矩平衡并结合变形协调条件,给出了热应力引起的双层梁弯曲的一般解。该方法被扩展到更为复杂的多层梁^[26]。将总应变分解为均匀应变和弯曲应变, HSUEH 等^[14,16,27-28]利用三变量方法研究了多层系统的应力和变形。张能辉等^[29-31]给出了更为简便的两变量方法。然而,上述方法适用于层合梁的残余效应研究,不便于分析桁架的装配效应。

尽管装配/残余效应的桁架和多层梁均属于超静定问题,但这些结构的一般解法尚未建立。目前,少量文献^[32-33]基于广义变分原理研究了装配误差下桁架结构内力/应力问题,但不能直接求解其他复杂结构的装配/残余问题。本文利用拉格朗日乘数法建立了含装配/残余效应的新泛函,利用变分法得到结构支座反力或内力的矩阵形式的一般解,最后以空腹桁架、曲杆以及层合梁为例验证了该方法的正确性和通用性。

1 装配/残余效应下的广义变分原理

当系统达到平衡状态时,其余应变能函数将达到其最小值,属于极值问题。对有 n 个组件的线性超静定结构,采用拉格朗日乘数法得含装配/残余效应下的新泛函的一般形式为^[20]

$$L = \sum_{j=1}^n V_j + \sum_{j=1}^n \Delta_j N_j^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i Q_i \quad (1)$$

式中: V_j ($j=1, 2, \dots, n$) 为第 j 个组件的余应变能函数,对线弹性材料,其应变能和余应变能相等; Δ_j 为第 j 个组件的装配/残余效应的几何误差; N_j^* 为第 j 个组件的轴力; λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为待定的拉格朗日乘子; $Q_i=0$ 为第 i 个独立的平衡方程; m ($n>m$) 为独立的平衡方程个数。值得

注意的是装配/残余效应的影响部分(等式右边第2部分)仅与轴力有关,与扭矩、弯矩等内力无关。

经过适当的简化或变换,式(1)可转为已有文献的理论。若不考虑装配/残余效应,式(1)可退化为经典的广义变分原理泛函^[34-35]。若考虑超静定桁架,第 j 个组件的余应变能函数 V_j 仅是杆件轴力的函数,式(1)与文献[32-33]中的理论一致。

将支座反力或内力 N_k 及 λ_i 都当作独立的变分宗量,则新泛函 L 变分为

$$\delta L = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial N_k} + \sum_{j=1}^n \Delta_j \frac{\partial N_j^*}{\partial N_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_k} \right) \delta N_k + \sum_{i=1}^m Q_i \delta \lambda_i = 0 \quad (2)$$

式中 p 为支座反力或内力的个数。

由于 δN_k 及 $\delta \lambda_i$ 都是独立的,则 L 的极值条件为:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = Q_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial N_k} + \sum_{j=1}^n \Delta_j \frac{\partial N_j^*}{\partial N_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p) \quad (4)$$

式(3)和式(4)分别表示静力学平衡方程和变形协调方程。由此可知,不同于传统的力法、位移法等,该能量法将求解超静定结构的支座反力或内力,转化为求系统相应的无条件广义变分原理的新泛函极值问题。

2 装配/残余效应下的矩阵解

考虑装配/残余效应下线性超静定结构,其 m 个独立平衡方程的一般形式为

$$Q_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} N_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

式中 a_{ij} 为支座反力或内力的系数。

第 j 个构件的余应变能函数为

$$V_j = \sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^p b_{sr}^{(j)} N_s^{(j)} N_r^{(j)} \quad (6)$$

式中: $N_i^{(j)}$ 为第 j 个构件的支座反力或内力; $b_{sr}^{(j)}$ 为第 j 个构件的支座反力或内力的二阶系数,其与材料力学性能、截面几何以及结构尺寸有关。

将式(5)和式(6)代入式(4)得

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{r=1}^p b_{kr}^{(j)} N_r^{(j)} + \sum_{s=1}^p b_{sk}^{(j)} N_s^{(j)} \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ik} = - \sum_{j=1}^n \Delta_j \frac{\partial N_j^*}{\partial N_k} \quad (k=1, 2, \dots, p) \quad (7)$$

将式(5)和式(7)改写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别为式(5)和式(7)的系数矩阵; \mathbf{A}^T 为 \mathbf{A} 的转置矩阵; \mathbf{N} 为支座反力或内力的向量; $\boldsymbol{\Lambda}$ 为拉格朗日乘子的向量; \mathbf{N}_e 为装配/残余效应的向量。

求解式(8)得^[20,36]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $\mathbf{C}_{11} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}$; $\mathbf{C}_{21} = (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{C}_{22} = -(\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}$ 。

利用式(9)得广义力(支座反力或内力)为

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}_{11} \mathbf{N}_e \quad (10)$$

3 结果与讨论

为了验证装配/残余效应下能量模型的正确性,下面将讨论空腹桁架、曲杆以及层合梁 3 种实例,并将计算结果与现有结果进行对比。

3.1 算例 1: 装配效应下的空腹桁架

如图 1 (a) 所示空腹桁架结构,悬臂梁 AB 和 CD 长度均为 l , 抗弯刚度均为 $E_1 I_1$ 。杆 BD 略长于名义长度 $l/2$, 其制造误差为 Δ , 抗拉压刚度为 $E_2 A_2$ 。试求杆 BD 的装配内力。

对梁 AB 进行受力分析, 如图 1 (b) 所示。由静力平衡条件可知:

$$F_A - F_N = 0 \quad (11)$$

$$M_A + lF_N = 0 \quad (12)$$

式中: F_N 为杆 BD 的轴力; F_A 和 M_A 分别为固定端 A 处的约束力和约束力偶。

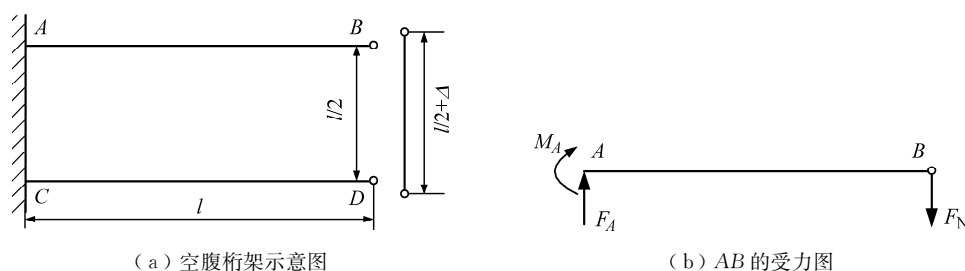


图 1 装配效应下的空腹桁架

Fig.1 Assembly effect on a vierendeel truss

对细长梁, 剪切变形能影响较小, 因此忽略剪切应变对梁应变能的影响。考虑到载荷和结构的对称性, 根据式 (1) 得新泛函为

$$L = 2 \int_0^l \frac{(M_A + F_A x)^2}{2E_1 I_1} dx + \int_0^{l/2} \frac{F_N^2}{2E_2 A_2} dx + \Delta F_N + \lambda_1 (F_A - F_N) + \lambda_2 (M_A + lF_N) \quad (13)$$

式中 $\lambda_i (i=1, 2)$ 为拉格朗日乘子。

将 F_N , F_A 和 M_A 都当作独立变量, 由式 (13) 得:

$$\frac{\partial L}{\partial F_N} = \frac{lF_N}{2E_2 A_2} + \Delta - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_A} = \frac{2l^3 F_A}{3E_1 I_1} + \frac{l^2 M_A}{E_1 I_1} + \lambda_1 = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_A} = \frac{l^2 F_A}{E_1 I_1} + \frac{2lM_A}{E_1 I_1} + \lambda_2 = 0 \quad (16)$$

将式 (11)、式 (12) 和式 (14) 至式 (16) 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} l/(2E_2 A_2) & 0 & 0 & -1 & l \\ 0 & 2l^3/(3E_1 I_1) & l^2/(E_1 I_1) & 1 & 0 \\ 0 & l^2/(E_1 I_1) & 2l/(E_1 I_1) & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_N \\ F_A \\ M_A \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

求解式 (17) 得杆 BD 的装配内力为

$$F_N = -\frac{6E_1 I_1 E_2 A_2 \Delta}{l(3E_1 I_1 + 4E_2 A_2 l^2)} \quad (18)$$

式中负号表明杆 BD 受压力。上式与文献 [37] 中的计算结果完全一致,说明了该能量法的正确性。

3.2 算例 2: 装配效应下的曲杆

如图 2 (a) 所示的曲杆结构,由弹性圆杆 AB 和刚杆 BC 组成,在 C 端上方有一垂直的直杆。已知杆 AB 的长度为 l ,材料的抗弯刚度和抗扭刚度分别为 EI 和 GI_p 。杆 BC 的长度为 a 。杆 CD 的加工长度比名义长度 h 略短,加工误差为 Δ ,材料的抗拉压刚度为 EA 。试求杆 CD 的装配内力。

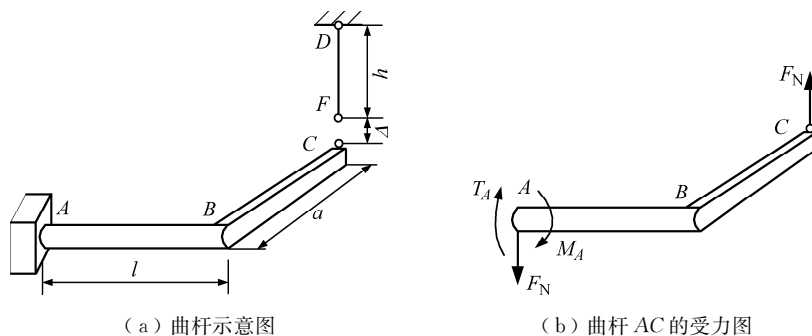


图 2 装配效应下的曲杆

Fig.2 Assembly effect on a curved bar

对曲杆 AC 进行受力分析,如图 2 (b) 所示。由静力平衡条件可知:

$$F_A - F_N = 0 \quad (19)$$

$$T_A - aF_N = 0 \quad (20)$$

$$M_A - lF_N = 0 \quad (21)$$

式中: F_N 为杆 CD 的装配轴力; F_A , T_A 和 M_A 为固定端 A 处的约束反力。

考虑杆件的拉压应变能、扭转应变能以及弯曲应变能,根据式 (1) 得新泛函为

$$L = \int_0^l \frac{(M_A - F_A x)^2}{2EI} dx + \int_0^l \frac{T_A^2}{2GI_p} dx + \int_0^h \frac{F_N^2}{2EA} dx - \Delta F_N + \lambda_1 (F_A - F_N) + \lambda_2 (T_A - aF_N) + \lambda_3 (M_A - lF_N) \quad (22)$$

式中 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 为拉格朗日乘子。

将 F_N , F_A , T_A 和 M_A 都当作独立变量,由式 (22) 得:

$$\frac{\partial L}{\partial F_N} = \frac{hF_N}{EA} - \Delta - \lambda_1 - a\lambda_2 - l\lambda_3 = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_A} = \frac{l^3 F_A}{3EI} - \frac{l^2 M_A}{2EI} + \lambda_1 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_A} = \frac{lT_A}{GI_p} + \lambda_2 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_A} = -\frac{l^2 F_A}{2EI} + \frac{lM_A}{EI} + \lambda_3 = 0 \quad (26)$$

将式 (19) 至式 (21)、式 (23) 至式 (26) 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} h/(EA) & 0 & 0 & 0 & -1 & -a & -l \\ 0 & l^3/(3EI) & 0 & -l^2/(2EI) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l/(GI_p) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l^2/(2EI) & 0 & l/(EI) & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_N \\ F_A \\ T_A \\ M_A \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

求解式 (27) 得杆 CD 轴力为

$$F_N = \frac{3EAIGIp\Delta}{3a^2lEAI + 3hIGIp + l^3AGIp} \quad (28)$$

上式与文献 [37] 中的计算结果完全一致, 说明了该方法能够求解装配效应下的曲杆内力问题。

3.3 算例 3: 残余应变效应下的双层悬臂梁

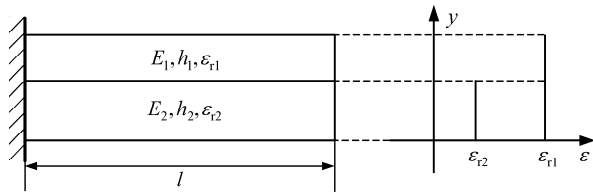
最后考虑残余应变效应下的双层悬臂梁, 其结构图以及初始残余应变分布如图 3 (a) 所示。双层悬臂梁的长度和宽度分别为 l 和 b 。各层的厚度、横截面面积、惯性矩、弹性模量、残余应变分别为 h_i , A_i , I_i , E_i , ϵ_{ri} ($i=1, 2$)。试求残余应变效应下的双层悬臂梁的内力以及曲率半径。

对双层悬臂梁进行受力分析, 如图 3 (b) 所示。由静力平衡条件可知:

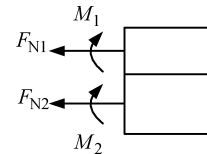
$$F_{N1} + F_{N2} = 0 \quad (29)$$

$$M_1 + M_2 - \frac{h_1 + h_2}{2} F_{N1} = 0 \quad (30)$$

式中 F_{Ni} 和 M_i ($i=1, 2$) 为各层的轴力和弯矩。



(a) 双层悬臂梁和初始残余应变分布示意图



(b) 双层悬臂梁右截面的受力图

图 3 残余应变效应下的双层悬臂梁

Fig.3 Residual strain effect on a bilayer cantilever beam

忽略剪切应变对梁应变能的影响, 根据式 (1) 得新泛函为

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1^2 l}{E_1 I_1} + \frac{F_{N1}^2 l}{E_1 A_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{M_2^2 l}{E_2 I_2} + \frac{F_{N2}^2 l}{E_2 A_2} \right) + l(\epsilon_{r1} F_{N1} + \epsilon_{r2} F_{N2}) + \lambda_1 (F_{N1} + F_{N2}) + \lambda_2 \left(M_1 + M_2 - \frac{h_1 + h_2}{2} F_{N1} \right) \quad (31)$$

式中 λ_i ($i=1, 2$) 为拉格朗日乘子。

将 F_{N1} , F_{N2} , M_1 和 M_2 都当作独立变量, 由式 (31) 得:

$$\frac{\partial L}{\partial F_{N1}} = \frac{l F_{N1}}{E_1 A_1} + \epsilon_{r1} l + \lambda_1 - \lambda_2 \frac{h_1 + h_2}{2} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_{N2}} = \frac{l F_{N2}}{E_2 A_2} + \epsilon_{r2} l + \lambda_1 = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_1} = \frac{l M_1}{E_1 I_1} + \lambda_2 = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_2} = \frac{l M_2}{E_2 I_2} + \lambda_2 = 0 \quad (35)$$

将式(29)、式(30)和式(32)至式(35)写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} l/(E_1 A_1) & 0 & 0 & 0 & 1 & -(h_1+h_2)/2 \\ 0 & l/(E_2 A_2) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l/E_1 I_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & l/(E_2 I_2) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_1+h_2)/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \\ M_1 \\ M_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\epsilon_{r1} l \\ -\epsilon_{r2} l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

求解式(36)得双层悬臂梁的内力为:

$$F_{N1} = -F_{N2} = \frac{4E_1 A_1 E_2 A_2 (E_1 I_1 + E_2 I_2) (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})}{K} \quad (37)$$

$$M_1 = \frac{2E_1 A_1 E_2 A_2 E_1 I_1 (h_1 + h_2) (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})}{K} \quad (38)$$

$$M_2 = \frac{2E_1 A_1 E_2 A_2 E_2 I_2 (h_1 + h_2) (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})}{K} \quad (39)$$

式中 $K = 4(E_1 A_1 + E_2 A_2)(E_1 I_1 + E_2 I_2) + E_1 A_1 E_2 A_2 (h_1 + h_2)^2$ 。

根据欧拉-伯努利梁理论,悬臂梁各层受到的弯矩为

$$M_i = \frac{E_i I_i}{\rho_i} \quad (i=1, 2) \quad (40)$$

式中 ρ_i ($i=1, 2$) 为各层的曲率半径。

考虑到梁的变形很小,曲率半径远大于梁的厚度,则各层具有相同的曲率半径,即 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 。因此,式(40)可简化为

$$M_i = \frac{E_i I_i}{\rho} \quad (i=1, 2) \quad (41)$$

由式(38)和式(41)可得双层悬臂梁的曲率半径为

$$\rho = \frac{K}{2E_1 A_1 E_2 A_2 (h_1 + h_2) (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})} \quad (42)$$

上式与文献[38]中的计算结果完全一致,表明了该变分法能够求解残余应变效应下的双层悬臂梁的内力以及变形问题,进一步说明了该方法的通用性。

4 结 论

利用广义变分原理研究了装配/残余效应下超静定结构的力学特性。引入拉格朗日乘数并结合静力平衡条件,构造了考虑装配/残余效应的拉格朗日函数,求解其极值问题,给出了支座反力或内力矩阵形式的通解。为了验证该能量法的有效性,对比了空腹桁架、曲杆以及层合梁3种算例,结果表明了该方法在求解装配/残余效应下各种超静定结构力学特性具有良好的通用性。

参考文献:

- [1] REBIELAK J. Examples of applications of two-stage method in calculations of statically indeterminate trusses[J]. International Journal of Computational Methods, 2018, 15(5): 1844009.

- [2] DE BIAGI V. Structural behavior of a metallic truss under progressive damage[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, 82: 56-64.
- [3] AHRARI A, DEB K. An improved fully stressed design evolution strategy for layout optimization of truss structures [J]. *Computers and Structures*, 2016, 164: 127-144.
- [4] AHMED S, OUNAIES Z, ARROJADO E A F. Electric field-induced bending and folding of polymer sheets[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2017, 260: 68-80.
- [5] VY N D, DAT L T, IIDA T. Cancellation of thermally induced frequency shifts in bimaterial cantilevers by nonlinear optomechanical interactions[J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109(5): 054102.
- [6] 余俊, 寇新建, 刘兴磊. 考虑制造和安装误差的桁架结构可靠性计算[J]. *四川建筑科学研究*, 2007, 33(1): 8-12.
- [7] SCHMIDT L C. Space trusses with brittle-type strut buckling[J]. *Journal of the Structural Division*, 1976, 102(7): 1479-1492.
- [8] TAN Z Q, ZHANG N H, MENG W L, et al. Mechanism for invalid detection of microcantilever-DNA biosensors due to environmental changes[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2016, 49: 225402.
- [9] FENG H, SANG S B, ZHANG W D, et al. Fundamental study of the micro-cantilever for more sensitive surface stress-based biosensor[J]. *Key Engineering Materials*, 2013, 562: 334-338.
- [10] SHAO S S, XUAN F Z, WANG Z D, et al. Stress in film/substrate system due to diffusion and thermal misfit effects[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2009, 42(17): 175413.
- [11] BEGLEY M R. The impact of materials selection and geometry on multi-functional bilayer micro-sensors and actuators[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, 15(12): 2379.
- [12] ZHANG Y, LI G, HUI D, et al. Modeling the postbuckling behavior of thermal-resistant ultrathin films attached to glass substrate[J]. *Composite Structures*, 2018, 206: 279-287.
- [13] WU K, ZHANG J, WANG Y, et al. Size- and strain-dependent buckle dimensions of nanostructured Cu/Nb multilayers on polyimide substrates[J]. *Materials Letters*, 2017, 206: 44-47.
- [14] PENG J S, FANG W, LIN H Y, et al. Measurements of residual stresses in the Parylene C film/silicon substrate using a microcantilever beam[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2013, 23: 095001.
- [15] NOYAN I C, COHEN J B. Residual stress: measurement by diffraction and interpretation[M]. New York: Sprmger Verlag, 2013.
- [16] HSUEH C H. Thermal stresses in elastic multilayer systems[J]. *Thin Solid Films*, 2002, 418(2): 182-188.
- [17] FURUYA H. Statistical sensitivity analysis of lattice space structures[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 1993, 6(3): 236-248.
- [18] KARPOV E G, STEPHEN N G, KAM LIU W. Initial tension in randomly disordered periodic lattices[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(20): 5371-5388.
- [19] TAN Z Q, CHEN Y C. Size-dependent electro-thermo-mechanical analysis of multilayer cantilever microactuators by Joule heating using the modified couple stress theory[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, 161: 183-189.
- [20] TAN Z Q, JIANG X D, HE Y S, et al. Generalized variational principles for solutions of statically indeterminate trusses under mechanical-thermal-assembly loadings [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2018, 144(1): 04017145.
- [21] GORDINI M, HABIBI M R, TAVANA M H, et al. Reliability analysis of space structures using Monte-Carlo simulation method[J]. *Structures*, 2018, 14: 209-219.
- [22] GREENE W H. Effects of random member length errors on the accuracy and internal loads of truss antennas[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1985, 22(5): 554-559.
- [23] SHEIDAI M R, GORDINI M. Effect of random distribution of member length imperfection on collapse behavior and reliability of flat double-layer grid space structures[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2015, 18(9): 1475-1485.

- [24] SMITH A P, GARLOFF J, WERKLE H. Verified solution for a statically determinate truss structure with uncertain node locations[J]. Journal of Civil Engineering and Architecture, 2010, 4(11): 1-10.
- [25] TIMOSHENKO S. Analysis of bi-metal thermostats[J]. Journal of the Optical Society of America, 1925, 11(3): 233-255.
- [26] FU J Y, CHEN D P, YE T C, et al. Modeling and optimal design of multilayer thermal cantilever microactuators [J]. Science in China Series E-Technological Sciences, 2009, 52(5): 1167-1170.
- [27] HSUEH C H. Modeling of elastic deformation of multilayers due to residual stresses and external bending[J]. Journal of Applied Physics, 2002, 91(12): 9652-9656.
- [28] HSUEH C H, LUTTRELL C R, CUI T. Thermal stress analyses of multilayered films on substrates and cantilever beams for micro sensors and actuators[J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2006, 16(11): 2509-2515.
- [29] ZHANG N H. Thermoelastic stresses in multilayered beams[J]. Thin Solid Films, 2007, 515(23): 8402-8406.
- [30] ZHANG N H, XING J J. An alternative model for elastic bending deformation of multilayered beams[J]. Journal of Applied Physics, 2006, 100(10): 103519.
- [31] ZHANG N H, CHEN J Z. An alternative model for elastic thermal stresses in two materials joined by a graded layer [J]. Composites Part B: Engineering, 2010, 41(5): 375-379.
- [32] 谭邹卿, 杨云澜, 田玉祥, 等. 广义变分原理在求解杆系装配应力中的应用[J]. 力学与实践, 2017, 39(2): 202-205.
- [33] 谭邹卿, 蒋学东, 张苗苗, 等. 超静定结构装配应力的一种新解法[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2017, 29(5): 46-51.
- [34] STEINER W. The use of Castigliano's theorem in Coulomb friction problems[J]. Acta Mechanica, 2014, 225(9): 2471-2483.
- [35] 成祥生. 结构分析中的广义变分原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 1985, 6(7): 639-646.
- [36] TAN Z Q, JIANG X D, HE Y S, et al. A closed-form solution for thermal stresses of structures using generalized variational principles[J]. Journal of Thermal Stresses, 2018, 41(6): 748-757.
- [37] 刘鸿文. 材料力学(I)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [38] JOHNSTONE R W, SAMEOTO D, PARAMESWARAN M. Non-uniform residual stresses for parallel assembly of out-of-plane surface-micromachined structures[J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2006, 16(11): N17-N22.

(责任编辑:殷丽莉)